

7月3問目

黒玉 3 個, 赤玉 4 個, 白玉 5 個が入っている袋から玉を 1 個ずつ取り出し, 取り出した玉を順に横一列に 12 個すべて並べる。ただし, 袋から個々の玉が取り出される確率は等しいものとする。

- (1) どの赤玉も隣り合わない確率 p を求めよ。
 (2) どの赤玉も隣り合わないとき, どの黒玉も隣り合わない条件付き確率 q を求めよ。

/ '23 東京大 (文理共通) 前期 理科 2 文科 3

解答

玉をすべて区別して考える。つまり

黒玉 : B_1, B_2, B_3

赤玉 : R_1, R_2, R_3, R_4

白玉 : W_1, W_2, W_3, W_4, W_5

とする。

- (1) 12 個の玉を横一列に並べた順列の総数は

$$12! \text{ (通り)}$$

である。この中で, どの赤玉も隣り合わない順列は, まず黒玉と白玉の計 8 個を並べてから, 赤玉をスキマに入れると考えることで

$$8! \cdot {}_9C_4 \cdot 4! = 9! \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \text{ (通り)}$$

したがって, 求める確率 p は

$$p = \frac{9! \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{12!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{12 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{14}{55}$$

- (2) どの赤玉も隣り合わない, かつ, どの黒玉も隣り合わない順列を考える。

イ) まず白玉 5 個を並べておいて, 黒玉をスキマに入れる。さらに, その後に赤玉をスキマに入れる, と考えると

$$5! \cdot {}_6C_3 \cdot 3! \cdot {}_9C_4 \cdot 4! = 9! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \text{ (通り)}$$

ロ) カタマリ「黒赤黒」の作り方が

$$3 \cdot 4 \cdot 2 = 24 \text{ (通り)}$$

あって, このカタマリを 1 つの黒玉と見て, イ) と同様に考えると

$$24 \cdot 5! \cdot {}_6C_2 \cdot 2! \cdot {}_8C_3 \cdot 3! = 9! \cdot 8 \cdot 2 \cdot 5 \text{ (通り)}$$

ハ) カタマリ「黒赤黒赤黒」の作り方が

$$3! \cdot 4 \cdot 3 = 72 \text{ (通り)}$$

あって, このカタマリを 1 つの黒玉と見て, イ) と同様に考えると

$$72 \cdot 5! \cdot 6 \cdot {}_7C_2 \cdot 2! = 9! \cdot 6 \text{ (通り)}$$

したがって, 求める条件付き確率 q は

$$\begin{aligned} q &= \frac{9! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 + 9! \cdot 8 \cdot 2 \cdot 5 + 9! \cdot 6}{9! \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} \\ &= \frac{6 \cdot 5 \cdot 2 + 8 \cdot 5 + 3}{8 \cdot 7 \cdot 3} \\ &= \frac{103}{168} \end{aligned}$$