

7月2問目

1つのさいころを4回投げて、 xy 平面上の点 (x_k, y_k) ($k = 0, 1, 2, 3, 4$)を次のように定める。

$$(x_0, y_0) = (0, 0)$$

$$(x_k, y_k) = \begin{cases} (x_{k-1}, y_{k-1}) & k \text{ 回目に出た目が1のとき} \\ (x_{k-1} + 1, y_{k-1}) & k \text{ 回目に出た目が2または3のとき} \\ (x_{k-1}, y_{k-1} + 1) & k \text{ 回目に出た目が4または5のとき} \\ (x_{k-1} + 1, y_{k-1} + 1) & k \text{ 回目に出た目が6のとき} \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

0以上4以下の2つの整数 x, y に対して、 $(x_4, y_4) = (x, y)$ となる確率を $P(x, y)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $P(2, 2)$, $P(3, 3)$ をそれぞれ求めよ。

(2) $\sum_{y=0}^4 P(0, y)$ を求めよ。

(3) $\sum_{y=0}^4 P(1, y)$ を求めよ。

(4) $\sum_{y=0}^4 P(x, y)$ を x で表せ。

/’23 横浜国立大（経済・経営）後期 3

解答

さいころを1回投げる時の事象を

S : 1の目が出る (確率: $\frac{1}{6}$)

R : 2または3の目が出る (確率: $\frac{1}{3}$)

U : 4または5の目が出る (確率: $\frac{1}{3}$)

N : 6の目が出る (確率: $\frac{1}{6}$)

とする。また

X : R または N (確率: $\frac{1}{2}$)

Y : S または U (確率: $\frac{1}{2}$)

とする。

(1) $(x_4, y_4) = (2, 2)$ となる事象の組は

$(R, R, U, U), (R, U, N, S), (N, N, S, S)$

であるから、それぞれの順番も考慮して

$$\begin{aligned} P(2, 2) &= {}_4C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^4 + 4! \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 + {}_4C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^4 \\ &= \frac{16 + 16 + 1}{6^3} = \frac{33}{6^3} = \frac{11}{72} \end{aligned}$$

$(x_4, y_4) = (3, 3)$ となる事象の組は

$(R, U, N, N), (N, N, N, S)$

であるから、それぞれの順番も考慮して

$$\begin{aligned} P(3, 3) &= 4 \cdot 3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 + 4 \left(\frac{1}{6}\right)^4 \\ &= \frac{12 + 1}{3^2 \cdot 6^2} = \frac{13}{324} \end{aligned}$$

(2) $(x_4, y_4) = (0, y)$ となる事象の組は

(Y, Y, Y, Y)

であるから

$$\sum_{y=0}^4 P(0, y) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

(3) $(x_4, y_4) = (1, y)$ となる事象の組は

(X, Y, Y, Y)

であるから、順番も考慮して

$$\sum_{y=0}^4 P(1, y) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$$

(4) $(x_4, y_4) = (x, y)$ となる事象の組は

X が x 個, Y が $4-x$ 個

であるから、順番も考慮して

$$\sum_{y=0}^4 P(x, y) = {}_4C_x \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{{}_4C_x}{16}$$