６月１問目

整数 a, b, c は条件

$$2 \leqq a < b < c \leqq 6$$

を満たすとする。

(1)　不等式 $a+b>c$ を満たすような $(a,\ b,\ c)$ をすべて挙げよ。

(2)　不等式 $a^2+b^2 \geqq c^2$ を満たすような $(a,\ b,\ c)$ をすべて挙げよ。

(3)　(2) で求めた各 $(a,\ b,\ c)$ について，頂点 A，B，C と向かい合う辺の長さがそれぞれ a, b, c で与えられる △ABC を考える。このようなすべての △ABC について $\cos\angle\mathrm{ACB}$ を求めよ。

/'25 北海道大（文系）前期 2

解答

(1)　条件

$$2 \leqq a < b < c \leqq 6 \quad \cdots\cdots (*)$$

を満たす整数 a, b に対する $a+b$ の値は次表の通り。

a \ b	3	4	5
2	5	6	7
3		7	8
4			9

したがって，$(*)$ と不等式 $a+b>c$ をともに満たす整数 a, b, c の組 $(a,\ b,\ c)$ は

(2, 3, 4), (2, 4, 5), (2, 5, 6), (3, 4, 5),
(3, 4, 6), (3, 5, 6), (4, 5, 6)

(2)　条件 $(*)$ を満たす整数 a, b に対する a^2+b^2 の値は次表の通り。

a \ b	3	4	5
2	13	20	29
3		25	34
4			41

さらに

$$4^2=16,\ 5^2=25,\ 6^2=36$$

に注意すると，$(*)$ と不等式 $a^2+b^2 \geqq c^2$ をともに満たす整数 a, b, c の組 $(a,\ b,\ c)$ は

(3, 4, 5), (4, 5, 6)

(3)　$(a,\ b,\ c)=(3,\ 4,\ 5)$ の場合，△ABC は辺 AB を斜辺とする直角三角形，つまり $\angle\mathrm{ACB}=90^\circ$ なので

$$\cos\angle\mathrm{ACB}=\cos 90^\circ=\mathbf{0}$$

$(a,\ b,\ c)=(4,\ 5,\ 6)$ の場合，余弦定理より

$$\cos\angle\mathrm{ACB}=\frac{4^2+5^2-6^2}{2\cdot4\cdot5}=\boldsymbol{\frac{1}{8}}$$