5月4問目

実数 a および自然数 n に対して，定積分

$$I(a,\ n) = \int_0^{2\pi} e^{ax}\sin(nx)\,dx$$

を考える。ここで e は自然対数の底である。

(1)　$I(a,\ n)$ を求めよ。

(2)　$a_n = \dfrac{\log n}{2\pi}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ のとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I(a_n,\ n)$ を求めよ。ただし，$\log n$ は n の自然対数である。また，必要ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n} = 0$ であることを用いてもよい。

/'25 北海道大（理系）前期 3

解 答

(1)　部分積分法により

$$\begin{aligned} I(a,\ n) &= \left[-\frac{1}{n}e^{ax}\cos(nx) + \frac{a}{n^2}e^{ax}\sin(nx)\right]_0^{2\pi} \\ &\qquad - \frac{a^2}{n^2}\int_0^{2\pi} e^{ax}\sin(nx)\,dx \\ &= -\frac{1}{n}e^{2\pi a} + \frac{1}{n} - \frac{a^2}{n^2}I(a,\ n) \end{aligned}$$

とできるので

$$\frac{n^2+a^2}{n^2}I(a,\ n) = \frac{1}{n}(1-e^{2\pi a})$$

$$\therefore\ \boldsymbol{I(a,\ n) = \frac{n}{n^2+a^2}(1-e^{2\pi a})}$$

(2)　$a_n = \dfrac{\log n}{2\pi}$ のとき

$$\begin{aligned} I(a_n,\ n) &= \frac{n}{n^2 + \left(\dfrac{\log n}{2\pi}\right)^2}(1-e^{\log n}) \\ &= \frac{\dfrac{1}{n} - 1}{1 + \dfrac{1}{4\pi^2}\left(\dfrac{\log n}{n}\right)^2} \end{aligned}$$

とできるので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n} = 0$ であることに注意して

$$\lim_{n\to\infty} I(a_n,\ n) = \frac{0-1}{1+\dfrac{1}{4\pi^2}\cdot 0^2} = \boldsymbol{-1}$$