5月3問目

実数 a，b についての次の条件（＊）を考える。

（＊）ある実数係数の 2 次式 $f(x)$ と，ある実数 c に対して，x についての恒等式

$$\frac{1}{8}x^4+ax^3+bx^2=f(f(x))+c$$

が成り立つ。

この条件（＊）を満たす点 $(a,\ b)$ 全体の集合を座標平面上に図示せよ。

/'25 京都大（文系）前期 2

解 答

p を 0 でない実数，q と r を実数として

$$f(x)=px^2+qx+r$$

とすると

$$\begin{aligned}&f(f(x))+c\\&=p\{f(x)\}^2+qf(x)+r+c\\&=p\{px^2+qx+r\}^2+q(px^2+qx+r)+r+c\\&=p^3x^4+2p^2qx^3+(2p^2r+pq^2+pq)x^2\\&\qquad+(2pqr+q^2)x+(pr^2+qr+r+c)\end{aligned}$$

であるから，x についての恒等式

$$\frac{1}{8}x^4+ax^3+bx^2=f(f(x))+c$$

が成り立つ為の条件は

$$\begin{cases}p^3=\dfrac{1}{8} & \cdots\cdots ①\\ 2p^2q=a & \cdots\cdots ②\\ 2p^2r+pq^2+pq=b & \cdots\cdots ③\\ 2pqr+q^2=0 & \cdots\cdots ④\\ pr^2+qr+r+c=0 & \cdots\cdots ⑤\end{cases}$$

① から，実数 p が存在して $p=\dfrac{1}{2}$ である。このとき，② から

$$\frac{1}{2}q=a \qquad \therefore\ q=2a$$

よって，実数 q も存在する。
また ⑤ から，実数 p，q，r が存在するならば実数 c も存在する。
したがって，$p=\dfrac{1}{2}$ と $q=2a$ を ③ ④ に代入して

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}r+2a^2+a=b & \cdots\cdots ③'\\ 2ar+4a^2=0 & \cdots\cdots ④'\end{cases}$$

を満たす実数 r が存在する為の条件を求める。
③$'$ から

$$r=2(b-2a^2-a)$$

とでき，この r が ④$'$ を満たす条件は

$$\begin{aligned}&2a\cdot 2(b-2a^2-a)+4a^2=0\\&\iff a(b-2a^2)=0\\&\iff a=0\ \text{または}\ b-2a^2=0\end{aligned}$$

以上から，条件（＊）を満たす点 $(a,\ b)$ 全体の集合は

b 軸 または 放物線 $b=2a^2$

であり，これを図示すると次図の太線部分である。