5月2問目

a を実数とし，座標空間内の 3 点 $\mathrm{P}(-1,\ 1,\ -1)$，$\mathrm{Q}(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{R}(a,\ a^2,\ a^3)$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) $a \neq -1$，$a \neq 1$ のとき，3 点 P，Q，R は一直線上にないことを示せ。

(2) a が $-1 < a < 1$ の範囲を動くとき，三角形 PQR の面積の最大値を求めよ。

/'24 九州大（理系）前期 1

解答

(1) 3 点 P，Q，R の座標から

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \begin{pmatrix} a+1 \\ a^2-1 \\ a^3+1 \end{pmatrix} = (a+1)\begin{pmatrix} 1 \\ a-1 \\ a^2-a+1 \end{pmatrix}$$

となり，$a \neq \pm 1$ より

$$(\overrightarrow{\mathrm{PR}}\text{の } y \text{ 成分}) = a^2 - 1 \neq 0$$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{\mathrm{PR}}$ となることはないので，題意は示された。 ■

(2) $b = a^2 - a + 1$ とおいて

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 = 8$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2 = (a+1)^2\{1 + (a-1)^2 + b^2\}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PR}} = 2(a+1)(1+b)$$

であるから

$$\begin{aligned}
&|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PR}})^2 \\
&= 8 \cdot (a+1)^2\{1 + (a-1)^2 + b^2\} \\
&\qquad\qquad - 4(a+1)^2(1+b)^2 \\
&= 4(a+1)^2\{1 + 2(a-1)^2 + b^2 - 2b\} \\
&= 4(a+1)^2\{2(a-1)^2 + (b-1)^2\} \\
&= 4(a+1)^2\{2(a-1)^2 + a^2(a-1)^2\} \\
&= 4(a+1)^2(a-1)^2(a^2+2) \\
&= 4(a^2-1)^2(a^2+2)
\end{aligned}$$

したがって，三角形 PQR の面積 S は

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PR}})^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{4(a^2-1)^2(a^2+2)} \\
&= \sqrt{(a^2-1)^2(a^2+2)}
\end{aligned}$$

と表せる。

ここで，$t = a^2$ とおくと，$-1 < a < 1$ より，t のとり得る値の範囲は

$$0 \leqq t < 1$$

であり

$$S = \sqrt{(t-1)^2(t+2)}$$

とできる。

$f(t) = (t-1)^2(t+2)$　$(0 \leqq t < 1)$ とすると

$$\begin{aligned}
f'(t) &= 2(t-1)(t+2) + (t-1)^2 \\
&= 3(t-1)(t+1) \\
&< 0
\end{aligned}$$

なので，$f(t)$ は $0 \leqq t < 1$ において単調に減少する。

ゆえに，S の最大値は

$$\sqrt{f(0)} = \boldsymbol{\sqrt{2}}$$