

1 辺の長さが 1 の正五角形を K とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) K の対角線の長さを求めよ。
- (2) K の周で囲まれた図形を P とする。また、 P を K の外接円の中心の周りに角 θ だけ回転して得られる図形を P_θ とする。 P と P_θ の共通部分の周の長さを ℓ_θ とする。 θ が $0^\circ < \theta < 72^\circ$ の範囲を動くとき、 ℓ_θ の最小値が $2\sqrt{5}$ であることを示せ。

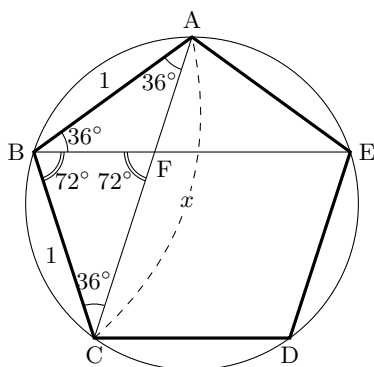
/'25 東北大 (理系) 前期 6

解答

- (1) 正五角形 K の各頂点を下図のように A, B, C, D, E とし, 辺 AC と辺 BE の交点を F とする。 K の外接円を考えて, K の一辺に対する円周角の大きさが

$$\frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$$

であることから、下図のようになる。また、対角線の長さを x とおく。



このとき

$$\text{AF} = \text{CA} - \text{CF} = \text{CA} - \text{CB} = x - 1$$

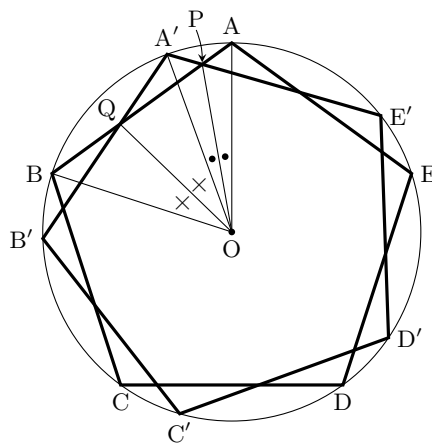
であり, $\triangle ABC \sim \triangle AFB$ から

$$\begin{aligned} \text{AB} : \text{AF} &= \text{AC} : \text{AB} \\ \therefore 1 : (x - 1) &= x : 1 \\ \therefore x^2 - x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$x > 0$ に注意して

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

- (2) 図形 P_θ の各頂点を下図のように、 A' , B' , C' , D' , E' とし、外接円の中心を O とする。また、辺 AB と 2 辺 $E'A'$, $A'B'$ の交点をそれぞれ P , Q とする。



このとき、 $\angle POA' = \angle POA$, $\angle QOA' = \angle QOB$ であり、 $\angle AOB = 72^\circ$ だから

$$\angle POQ = \frac{1}{2} \angle AOB = 36^\circ$$

また、図形の対称性より、 P と P_θ の共通部分は 10 個の辺からなり、この 10 辺はすべて長さが等しい。よって、周の長さ ℓ_θ は

$\ell_\theta = 10\text{PQ}$

で得られる。ただし、 θ ($= \angle AOA'$) の範囲は

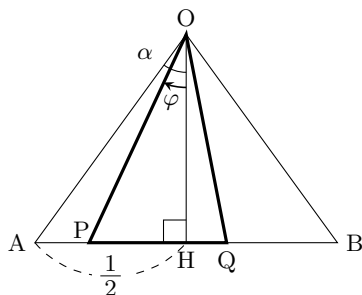
$$0^\circ < \theta \leq 36^\circ$$

で考えれば十分である。

点 O から辺 AB に下ろした垂線の足を H とし、 $\varphi = \angle POH$ とおく。ただし、 φ は弧度法であり、とり得る値の範囲は

$$0 \leq \varphi < \frac{\pi}{5}$$

である。以下, $\alpha = \frac{\pi}{5}$ とおく。



このとき

$$\angle QOH = \angle POQ - \varphi = \alpha - \varphi$$

であることに注意して

$$\begin{aligned} PH &= OH \tan \varphi, \quad QH = OH \tan(\alpha - \varphi) \\ \therefore PQ &= PH + QH = OH \{ \tan \varphi + \tan(\alpha - \varphi) \} \\ \therefore \ell_\theta &= 10OH \{ \tan \varphi + \tan(\alpha - \varphi) \} \end{aligned}$$

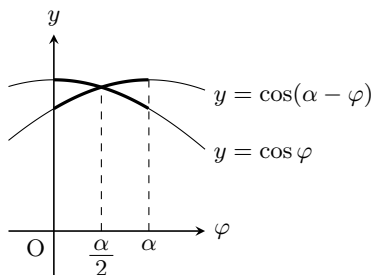
ここで、 $f(\varphi) = \tan \varphi + \tan(\alpha - \varphi)$ とすると

$$\begin{aligned} f'(\varphi) &= \frac{1}{\cos^2 \varphi} - \frac{1}{\cos^2(\alpha - \varphi)} \\ &= \frac{\{ \cos(\alpha - \varphi) + \cos \varphi \} \{ \cos(\alpha - \varphi) - \cos \varphi \}}{\cos^2 \varphi \cos^2(\alpha - \varphi)} \end{aligned}$$

となり、 $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{5}$, $0 < \alpha - \varphi \leq \frac{\pi}{5}$ より

$$\frac{\cos(\alpha - \varphi) + \cos \varphi}{\cos^2 \varphi \cos^2(\alpha - \varphi)} > 0$$

なので、 $f'(\varphi)$ の符号は $\cos(\alpha - \varphi) - \cos \varphi$ の符号に一致する。



$y = \cos(\alpha - \varphi)$ と $y = \cos \varphi$ のグラフが上図のようになることに注意して、 $f(\varphi)$ の増減は次表の通り。

φ	0	...	$\frac{\alpha}{2}$	...	(α)
$f'(\varphi)$		-	0	+	
$f(\varphi)$			$\searrow$		$\nearrow$

ゆえに、 ℓ_θ の最小値は

$$\begin{aligned} 10OHf\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= 10 \cdot \frac{1}{2 \tan \alpha} \cdot 2 \tan \frac{\alpha}{2} \\ &= 10 \cdot \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \tan \frac{\alpha}{2}} \cdot \tan \frac{\alpha}{2} \\ &= 5 \left(1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}\right) \\ &= 5 \left(1 - \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}\right) \\ &= \frac{10 \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \end{aligned}$$

である。(1) の $\triangle ABC$ に注目して

$$\cos \alpha = \frac{x}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

であるから

$$\begin{aligned} 10OHf\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{10 \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{4}}{1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{4}} \\ &= \frac{10(1 + \sqrt{5})}{\sqrt{5}(1 + \sqrt{5})} \\ &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

■

別解 (解答と同様に各点を取り、また、ここでは $\alpha = 36^\circ$ とする。)

正五角形 K の外接円の半径を r とすると

$$r = OA = \frac{AH}{\sin \alpha} = \frac{1}{2 \sin \alpha}$$

である。

まず、 $\triangle OAP$ に注目すると

$$\angle OAP = 54^\circ, \quad \angle AOP = \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \angle OPA = 180^\circ - 54^\circ - \frac{\theta}{2} = 90^\circ - \left(\frac{\theta}{2} - \alpha\right)$$

よって、正弦定理により

$$\frac{OP}{\sin 54^\circ} = \frac{OA}{\sin \left(90^\circ - \left(\frac{\theta}{2} - \alpha\right)\right)}$$

が成り立つから

$$OP = \frac{\sin 54^\circ}{\sin \left(90^\circ - \left(\frac{\theta}{2} - \alpha\right)\right)} r = \frac{\cos \alpha}{\cos \left(\frac{\theta}{2} - \alpha\right)} r$$

次に、 $\triangle OPQ$ に注目すると

$$\angle POQ = \alpha \quad (\text{解答参照}), \quad \angle OPQ = \frac{\theta}{2} + 54^\circ$$

$$\therefore \angle OQP = 180^\circ - \alpha - \left(\frac{\theta}{2} + 54^\circ\right) = 90^\circ - \frac{\theta}{2}$$

よって、正弦定理により

$$\frac{PQ}{\sin \alpha} = \frac{OP}{\sin \left(90^\circ - \frac{\theta}{2}\right)}$$

が成り立つから

$$\begin{aligned} PQ &= \frac{\sin \alpha}{\cos \frac{\theta}{2}} OP \\ &= \frac{\sin \alpha}{\cos \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \left(\frac{\theta}{2} - \alpha\right)} r \\ &= \frac{\sin \alpha}{\cos \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \left(\frac{\theta}{2} - \alpha\right)} \cdot \frac{1}{2 \sin \alpha} \\ &= \frac{\cos \alpha}{\cos(\theta - \alpha) + \cos \alpha} \end{aligned}$$

これが最小になるのは、 $\cos(\theta - \alpha)$ が最大になるときだから、 $\theta = \alpha$ のときである。よって、 $\ell_\theta = 10PQ$ の最小値は $\frac{10 \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$ である。(以下省略)