4 月 4 問目

関数 $f(x)$ を $x \geqq 0$ に対して $f(x) = x\log(1+x)$ と定める。

(1) 不定積分 $\displaystyle\int x\log(1+x)\,dx$ を求めよ。

(2) $y = f(x)$ $(x \geqq 0)$ の逆関数を $y = g(x)$ $(x \geqq 0)$ とする。また a，b を $g(a) = 1$，$g(b) = 2$ となる実数とする。このとき定積分

$$I = \int_a^b g(x)\,dx$$

の値を求めよ。

(3) 関数 $P(x)$ を $x \geqq 0$ に対して $P(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{1+f(t)}\,dt$ と定める。このとき $y = P(x)$ について，定義域を $x \geqq 0$ とする逆関数 $y = Q(x)$ が微分可能であることは証明なしに認めてよい。関数 $R(x)$ を $x \geqq 0$ に対して

$$R(x) = \int_0^{P(x)} \frac{1}{Q'(v)}\,dv$$

と定めるとき，$R(x)$ を求めよ。

/'25 東京科学大（理工学系）前期 1

解 答

(1) 部分積分法により

$$\int x\log(1+x)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2\log(1+x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x}\,dx$$

とでき，さらに，C_1 を積分定数として

$$\int \frac{x^2}{1+x}\,dx = \int \frac{(x+1)(x-1)+1}{1+x}\,dx$$
$$= \int \left(x - 1 + \frac{1}{1+x}\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2 - x + \log(1+x) + C_1$$

であるから

$$\int x\log(1+x)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2\log(1+x)$$
$$- \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}x^2 - x + \log(1+x) + C_1\right\}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}(x^2-1)\log(1+x) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + C_2}$$

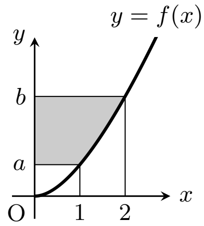
(C_2 : 積分定数)

(2) まず，定積分の値は変数に依存しないので

$$I = \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b g(y)\,dy$$

である。

$x > 0$ において，x と $\log(1+x)$ はともに正の値をとる増加関数なので，$f(x)$ も増加関数である。したがって，定積分 I の値は右図の灰色部分の面積に等しい。ゆえに



$$I = 2\cdot b - 1\cdot a - \int_1^2 f(x)\,dx$$
$$= 2\cdot 2\log 3 - \log 2$$
$$- \left[\frac{1}{2}(x^2-1)\log(1+x) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x\right]_1^2$$
$$= \boldsymbol{\frac{5}{2}\log 3 - \log 2 + \frac{1}{4}}$$

(3) $v = P(u)$ とすると

$$\frac{dv}{du} = P'(u) = \sqrt{1+f(u)} = \frac{1}{Q'(v)}$$

なので

$$R(x) = \int_0^{P(x)} \frac{1}{Q'(v)}\,dv$$
$$= \int_0^x \sqrt{1+f(u)}\,\frac{dv}{du}\,du$$
$$= \int_0^x \{1+f(u)\}\,du$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}(x^2-1)\log(1+x) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x}$$