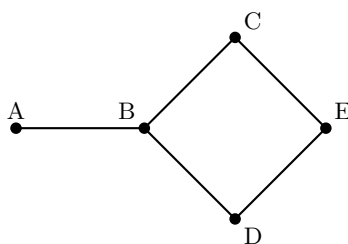


4月3問目

5点 A, B, C, D, E が下図のように線分でむすばれている。点 $P_1, P_2, P_3, \dots$ を次のように定めていく。 P_1 を A とする。正の整数 n に対して、 P_n を端点とする線分をひとつ無作為に選び、その線分の P_n とは異なる端点を P_{n+1} とする。

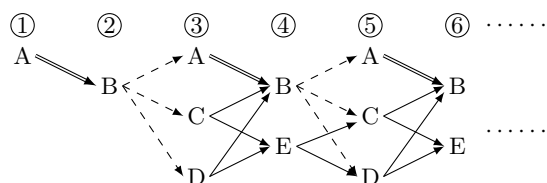


- (1) P_n が A または B である確率 p_n を求めよ。
- (2) P_n が A または B であるとき、 $k = 1, 2, \dots, n$ のいずれに対しても $P_k = E$ とはならない条件付き確率 q_n を求めよ。

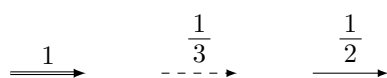
/'25 一橋大 (商・経済・他) 前期 5

解答

(1) 題意より、 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対する点 P_n の推移は次図のようになり、 n が奇数のときの P_n は A, C, D のいずれかであり、 n が偶数のときの P_n は B, E のいずれかであることが分かる。



ただし、各矢印の推移確率は



である。

イ) n が奇数の場合

$P_{n+2} = A$ となるのは

- $P_n = A$ であり、かつ、線分 AB, 線分 BA の順に選ぶとき
- $P_n = C$ であり、かつ、線分 CB, 線分 BA の順に選ぶとき
- $P_n = D$ であり、かつ、線分 DB, 線分 BA の順に選ぶとき

なので、 $n = 1, 3, 5, \dots$ に対して

$$\begin{aligned} p_{n+2} &= p_n \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} + (1 - p_n) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{6} p_n + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

が成り立つ。これは

$$p_{n+2} - \frac{1}{5} = \frac{1}{6} \left(p_n - \frac{1}{5} \right)$$

と変形できるので、 $p_1 = 1$ も考慮して

$$\begin{aligned} p_n - \frac{1}{5} &= \left(p_1 - \frac{1}{5} \right) \left(\frac{1}{6} \right)^{\frac{n-1}{2}} \\ \therefore p_n &= \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \left(\frac{1}{6} \right)^{\frac{n-1}{2}} \end{aligned}$$

ロ) n が偶数の場合

$P_n = B$ となるのは

- $P_{n-1} = A$ であり、かつ、線分 AB を選ぶとき
- $P_{n-1} = C$ であり、かつ、線分 CB を選ぶとき
- $P_{n-1} = D$ であり、かつ、線分 DB を選ぶとき

なので、 $n = 2, 4, 6, \dots$ に対して

$$\begin{aligned} p_n &= p_{n-1} \cdot 1 + (1 - p_{n-1}) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} p_{n-1} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \left(\frac{1}{6} \right)^{\frac{n-2}{2}} \right\} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \left(\frac{1}{6} \right)^{\frac{n-2}{2}} \end{aligned}$$

以上から

$$p_n = \begin{cases} \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \left(\frac{1}{6} \right)^{\frac{n-1}{2}} & (n: \text{奇数}) \\ \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \left(\frac{1}{6} \right)^{\frac{n-2}{2}} & (n: \text{偶数}) \end{cases}$$

(2) P_n が A または B であり, かつ, $k = 1, 2, \dots, n$ に対して $P_k \neq E$ である確率を r_n とする。

ハ) n が奇数の場合

まず, $P_1 = A$ なので

$$r_1 = 1$$

である。

$n \geq 3$ のとき, $k = 2, 4, 6, \dots, n-1$ のすべてで $P_k = B$ であり, かつ, $P_n = A$ となる場合を考えると, まず $P_2 = B$ であり, その後「線分 BA, 線分 AB の順に選ぶ」「線分 BC, 線分 CB の順に選ぶ」「線分 BD, 線分 DB の順に選ぶ」のいずれかで推移することを $\frac{n-3}{2}$ 回繰り返す, 最後に線分 BA を選ぶ場合だから

$$\begin{aligned} r_n &= 1 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \right)^{\frac{n-3}{2}} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{n-3}{2}} \end{aligned}$$

これは, 3 以上のすべての奇数 n に対して成り立つ。

ニ) n が偶数の場合

$k = 2, 4, 6, \dots, n$ のすべてで $P_k = B$ である場合を考えると, まず $P_2 = B$ であり, その後「線分 BA, 線分 AB の順に選ぶ」「線分 BC, 線分 CB の順に選ぶ」「線分 BD, 線分 DB の順に選ぶ」のいずれかで推移することを $\frac{n-2}{2}$ 回繰り返す場合だから

$$\begin{aligned} r_n &= 1 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \\ &= \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{n-2}{2}} \end{aligned}$$

これは, 2 以上のすべての偶数 n に対して成り立つ。

以上から

$$r_n = \begin{cases} 1 & (n = 1) \\ \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{n-3}{2}} & (n: 3 \text{ 以上の奇数}) \\ \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{n-2}{2}} & (n: \text{偶数}) \end{cases}$$

であるので, 求める条件付き確率 q_n は

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{r_n}{p_n} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{1} & (n = 1) \\ \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{n-3}{2}}}{\frac{1}{5} + \frac{4}{5} \left(\frac{1}{6} \right)^{\frac{n-1}{2}}} & (n: 3 \text{ 以上の奇数}) \\ \frac{\left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{n-2}{2}}}{\frac{3}{5} + \frac{2}{5} \left(\frac{1}{6} \right)^{\frac{n-2}{2}}} & (n: \text{偶数}) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & (n = 1) \\ \frac{5 \cdot 2^{n-2}}{6^{\frac{n-1}{2}} + 4} & (n: 3 \text{ 以上の奇数}) \\ \frac{5 \cdot 2^{n-2}}{3 \cdot 6^{\frac{n-2}{2}} + 2} & (n: \text{偶数}) \end{cases} \end{aligned}$$