

4月2問目

正の整数 x, y, z を用いて

$$N = 9z^2 = x^6 + y^4$$

と表される正の整数 N の最小値を求めよ。

/ '25 京都大 (理系) 前期 2

解答

x, y を 3 で割った余りで分類して

$$x = 3k + r_1, \quad y = 3l + r_2$$

とおく。ただし、 k と l は整数で、 r_1 と r_2 はそれぞれ $-1, 0, 1$ をとる。このとき

$$x^6 = (3k + r_1)^6 = 3X + r_1^6$$

$$y^4 = (3l + r_2)^4 = 3Y + r_2^4$$

となる整数 X, Y が存在するから

$$x^6 + y^4 = 3(X + Y) + r_1^6 + r_2^4$$

ここで、 r_1, r_2 の値に対す

る $r_1^6 + r_2^4$ の値は右表のようになる。

$9z^2 = x^6 + y^4$ が成り立つ
 ためには、 $r_1^6 + r_2^4$ が 3 の倍数であることが必要だから

$r_1 \backslash r_2$	-1	0	1
-1	2	1	2
0	1	0	1
1	2	1	2

$$(r_1, r_2) = (0, 0)$$

に限る。このとき、 $x = 3k, y = 3l$ (k, l : 正の整数) と表せるから

$$\begin{aligned} 9z^2 = x^6 + y^4 &\iff 9z^2 = 3^6 k^6 + 3^4 l^4 \\ &\iff z^2 = 3^2 (3^2 k^6 + l^4) \end{aligned}$$

となり、 z も 3 の倍数である。

よって、 $z = 3m$ (m : 正の整数) とおけて

$$3^2 m^2 = 3^2 (3^2 k^6 + l^4) \quad \therefore m^2 = 9k^6 + l^4$$

イ) $k = 1$ の場合

$$m^2 = 9 + l^4$$

- $l = 1$ のとき、 $m^2 = 10$ となり不適。
- $l = 2$ のとき、 $m^2 = 25$ より $m = 5$ で適する。

ロ) $k \geq 2$ の場合

$$m^2 = 9k^6 + l^4 > 9 \cdot 2^6 > 25$$

以上から、 $(k, l, m) = (1, 2, 5)$ 、すなわち

$$(x, y, z) = (3, 6, 15)$$

のときに N は最小となり、その最小値は

$$N = 9 \cdot 15^2 = \mathbf{2025}$$

《注》勘の良い人であれば

$$2025 = 45^2 = 9 \cdot 15^2$$

であり、一方で三平方の定理の式を思い浮かべて

$$2025 = 3^4 \cdot 5^2 = 3^4 (3^2 + 4^2) = 3^6 + 6^4$$

に気づけたかもしれない。

この場合、 z として 1 から 14 までは当てはまらないことを確認すれば、解答としても文句はない。