4 月 1 問目

(1) 確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき，$0 \leqq Z \leqq u$ となる確率を $p(u)$ で表す。いくつかの u の値に対する $p(u)$ の値を以下の表にまとめた。

u	0.67	1.00	1.64	1.80	2.00	2.50
$p(u)$	0.2486	0.3413	0.4495	0.4641	0.4772	0.4938

この表を用いて，身長の分布について考察してみよう。

ある年の高校 3 年生女子の身長は，平均 158 cm，標準偏差 5 cm の正規分布に従うと仮定する。この年の高校 3 年生女子の中で，身長が 153 cm 以上 170.5 cm 以下の生徒は約 $\boxed{\text{(あ)}}$ % いる。この年の高校 3 年生女子の中で，身長が低い方から 2.5 % の中に入る生徒の身長は $\boxed{\text{(い)}}$ cm 以下である。ただし，空欄 (あ) には小数第 1 位を四捨五入して，整数値を入れ，空欄 (い) には当てはまる最も大きい整数値を入れなさい。

(2) 連続型確率変数 X のとりうる値の範囲が $1 \leqq X \leqq e$ であり，その確率密度関数が $f(x) = rx\log x\ \ (1 \leqq x \leqq e)$ で与えられている。ただし，r は定数であり，e は自然対数の底である。このとき，$r = \boxed{\text{(う)}}$ である。

/'25 慶應大（医）2 月 9 日 1(1)(2)

解 答

(1)　ある年の高校 3 年生女子の身長 X は $N(158,\ 5^2)$ に従い

$$Z = \frac{X-158}{5}$$

で標準化すると，Z は $N(0,\ 1^2)$ に従う。ゆえに

$$\begin{aligned} P(153 \leqq X \leqq 170.5) &= P(-1 \leqq Z \leqq 2.5) \\ &= p(1.00) + p(2.50) \\ &= 0.3413 + 0.4938 \\ &= 0.8351 \end{aligned}$$

であるから，身長が 153 cm 以上 170.5 cm 以下の生徒は約 **84** % いる。　…… (あ)

また

$$\begin{aligned} 0.5 - p(2.00) = 0.5 - 0.4772 = 0.0228 \\ 0.5 - p(1.80) = 0.5 - 0.4641 = 0.0359 \end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned} Z \leqq -2.00 &\iff X \leqq 148 \\ Z \leqq -1.80 &\iff X \leqq 149 \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} P(X \leqq 148) = 0.0228 \\ P(X \leqq 149) = 0.0359 \end{aligned}$$

である。よって，身長が低い方から 2.5 % の中に入る生徒の身長は **148** cm 以下である。　…… (い)

(2)　部分積分法により

$$\begin{aligned} \int_1^e f(x)\,dx &= r\int_1^e x\log x\,dx \\ &= r\left[\frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2\right]_1^e \\ &= r\cdot\frac{1}{4}(e^2+1) \end{aligned}$$

であり，確率密度関数の定義により

$$\int_1^e f(x)\,dx = 1$$

であるから

$$r\cdot\frac{1}{4}(e^2+1) = 1$$

$$\therefore\ \ r = \boldsymbol{\frac{4}{e^2+1}} \qquad \cdots\cdots \text{(う)}$$