正接の数学散歩(その他の資料集)
数学散歩　1　$\tan 2\theta$ から$\tan\theta$ を求める。

（Q1-1）$\tan\frac{\pi}{4}=1$，$\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ から，$\tan\frac{\pi}{8}$，$\tan\frac{\pi}{12}$ を求めよ。

（考察　1—1）$\tan 2\theta$ の値から2次方程式を用いて$\tan\theta$ を考える。

◎正接の加法定理

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

◎正接の2倍角の定理

$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

◎$\tan\theta$ を求める

$\tan\theta=x$ とおけば，$\tan 2\theta=\frac{2x}{1-x^2}$

$$(1-x^2)\tan 2\theta=2x$$
$$(\tan 2\theta)x^2+2x-\tan 2\theta=0$$
$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+\tan^2 2\theta}}{\tan 2\theta}$$
$$\tan\theta=\frac{-1\pm\sqrt{1+\tan^2 2\theta}}{\tan 2\theta}$$

(解)

(1)$\tan\frac{\pi}{8}$

$\tan\frac{\pi}{8}>0$ より　$\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$

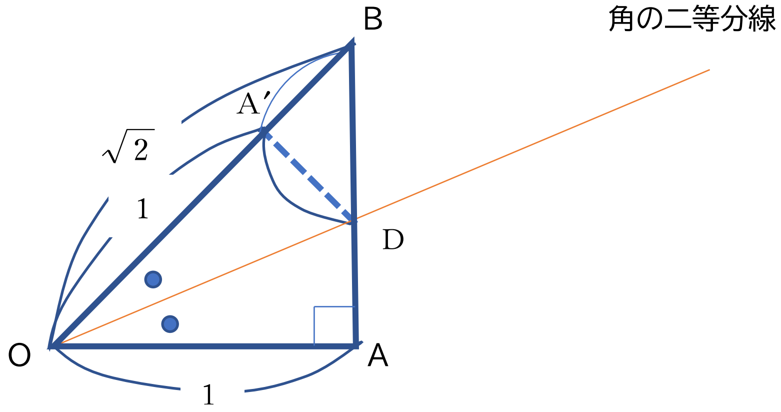
(2)$\tan\frac{\pi}{12}$

$\tan\frac{\pi}{12}>0$ より　$\tan\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$

（考察　1−2）$\tan 2\theta$ の値から図形を用いて $\tan\theta$ を考える。

（例）図形で $\tan\dfrac{\pi}{8}$ を求める。

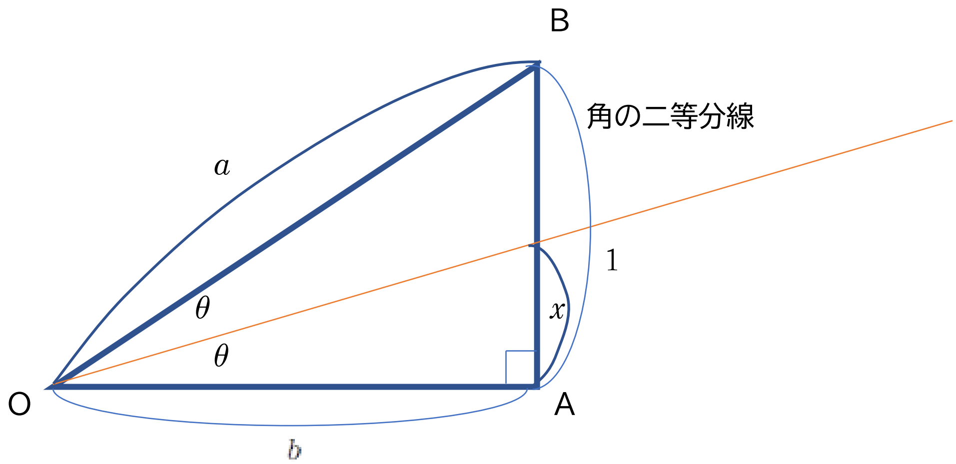
(解)角の二等分線で折り曲げる。



$\triangle$A′BDは，A′B＝A′D＝$\sqrt{2}-1$ の直角二等辺三角形だから

$$\tan\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2}-1}{1}=\sqrt{2}-1$$

（考察　1−3）$\tan 2\theta$ の値から高さ1の直角三角形を用いて $\tan\theta$ を考える。



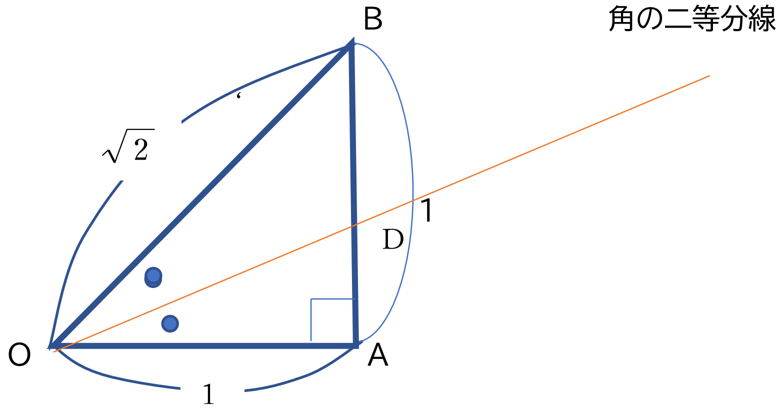
頂角の二等分線は角を作る2辺の長さの比に対辺を内分するので

$$x=1\times\frac{b}{a+b}=\frac{b}{a+b}$$

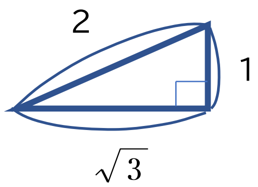
$$\tan\theta=\frac{x}{b}=\frac{1}{a+b}=\frac{a-b}{a^2-b^2}=\frac{a-b}{1}=a-b$$

(斜辺の長さと底辺の長さの差になっている)

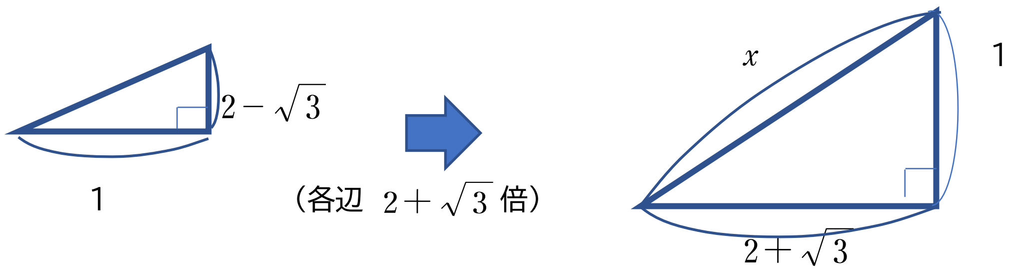
（Q1-2） $\tan\frac{\pi}{4}=1$ から高さ1の直角三角形を用いて$\tan\frac{\pi}{8}$ を求めよ。



（Q1-3） $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ から高さ1の直角三角形を用いて$\tan\frac{\pi}{12}$ を求めよ。



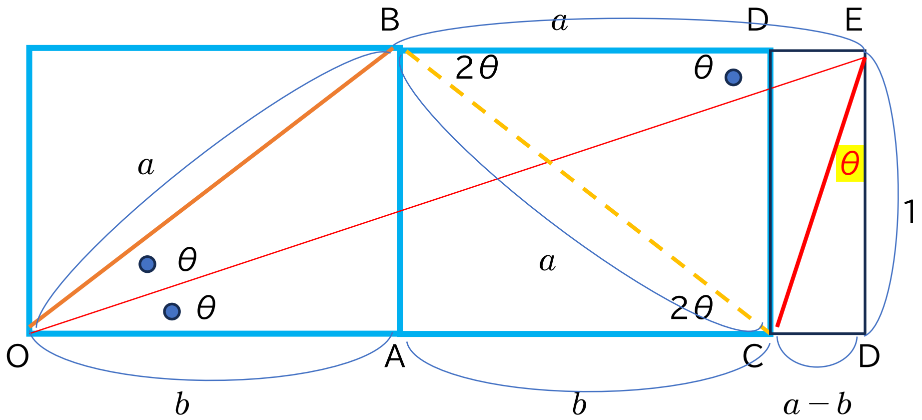
（Q1-4） $\tan\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$ から高さ1の直角三角形を用いて$\tan\frac{\pi}{24}$ を求めよ。



$x=\sqrt{1^2+(2+\sqrt{3})^2}=\sqrt{8+2\sqrt{12}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$ より

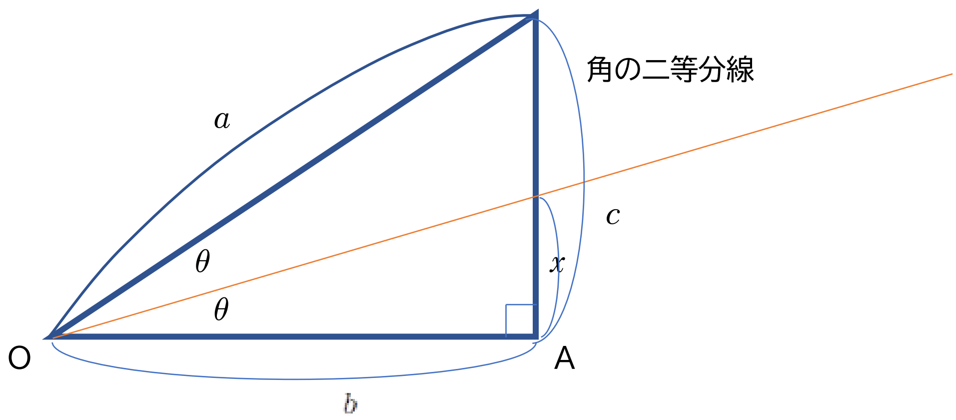
$\tan\frac{\pi}{24}=\sqrt{6}+\sqrt{2}-(2+\sqrt{3})$

（考察　1−4）$\tan 2\theta$ の値から距離1の平行線を用いて$\tan\theta$ を考える。



図より　$\tan\theta = a - b$

（考察　1−5）3辺の長さがa,b,c で　$\tan 2\theta = \dfrac{c}{b}$ のとき，$\tan\theta$ を考える。



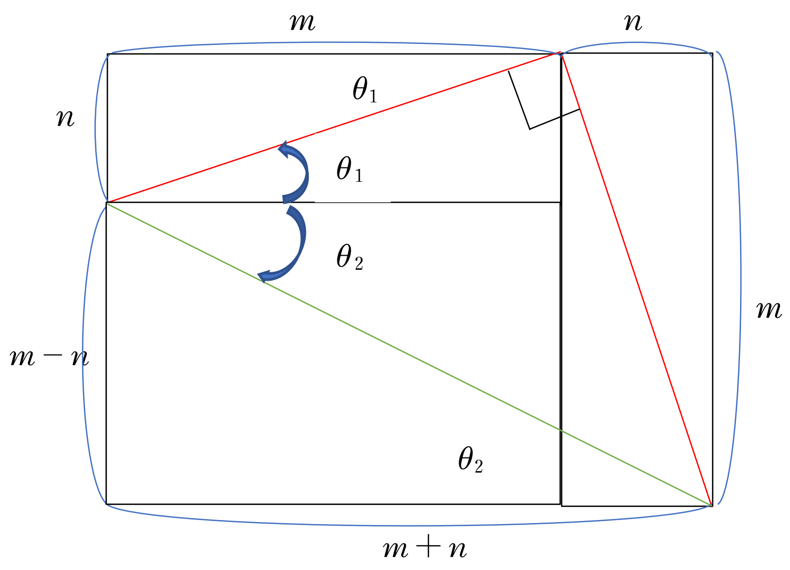
$$x = c \times \frac{b}{a+b} = \frac{bc}{a+b}$$ より

$$\tan\theta = \frac{x}{b} = \frac{c}{a+b} = \frac{c(a-b)}{a^2-b^2} = \frac{c(a-b)}{c^2} = \frac{a-b}{c}$$

として得られる。

（Q2-2）2つの直角三角形の直角を挟む辺の長さが整数であるとき，二つの頂角の和が $\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{2}$ になる場合を，作図せよ。

2つの頂角の和が $\frac{\pi}{4}$ の三角形・・・・・・(m,n) 型に対して　$(m+n,m-n)$ 型を作る。



$\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{4}$ は，作図から明らかであるが，加法定理で確認すると，

$$\tan\theta_1=\frac{n}{m},\tan\theta_2=\frac{m-n}{m+n}$$

$$\tan(\theta_1+\theta_2)=\frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2}=\frac{\frac{n}{m}+\frac{m-n}{m+n}}{1-\frac{n}{m}\cdot\frac{m-n}{m+n}}=\frac{n(m+n)+m(m-n)}{m(m+n)-n(m-n)}$$

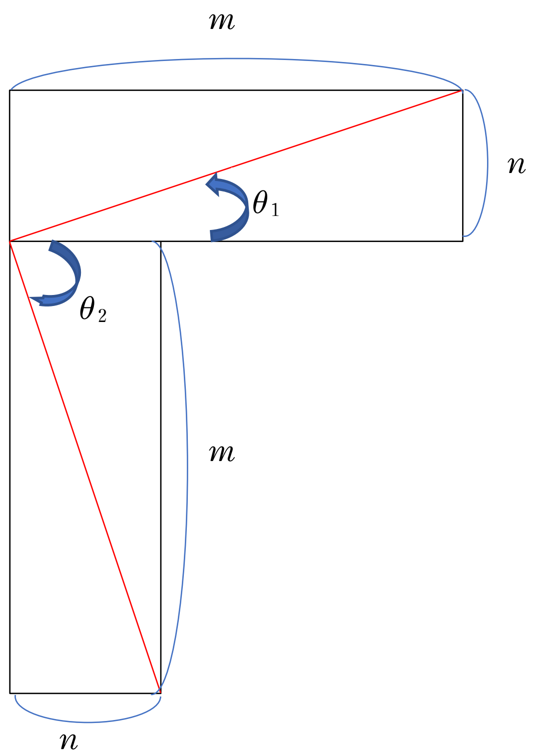
$$=\frac{n^2+m^2}{m^2+n^2}=1\quad \text{よって}\quad \theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{4}$$

（例）（4，1）型の直角三角形に対して，（5，3）型の直角三角形を作ると，

頂角の和は $\frac{\pi}{4}$ が得られる。

$$\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}1=\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{3}{5}$$

2つの頂角の和が$\frac{\pi}{2}$ の三角形・・・・・・・・(m,n) 型に対して(n,m) 型を作る。



$\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{2}$ は作図から明らかであるが，ベクトル内積で確認すると，

$\tan\theta_1=\frac{n}{m}$,$\tan\theta_2=\frac{m}{n}$

方向ベクトルを $\overrightarrow{l_1}=(m,n)$,$\overrightarrow{l_2}=(n,-m)$ とすると

ベクトルの内積 $\overrightarrow{l_1}\cdot\overrightarrow{l_2}=mn-mn=0$ よって$\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{2}$

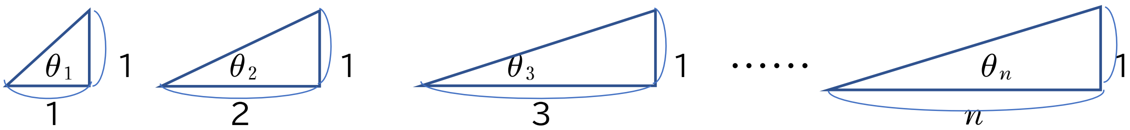
(例)（4，1)型の直角三角形に対して，（1，4)型の直角三角形を作ると，

頂角の和は$\frac{\pi}{2}$ が得られる。

$\frac{\pi}{2}=\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}4$

数学散歩 2　級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \tan^{-1}\frac{1}{n}$ の極限

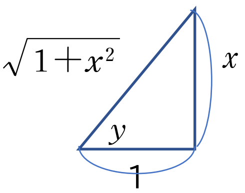
(Q2—5) $\tan\theta_n=\frac{1}{n}$ のとき　級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n$ の極限を求めよ。



$\tan\theta_1=1$　　$\tan\theta_2=\frac{1}{2}$　　$\tan\theta_3=\frac{1}{3}$　　$\tan\theta_n=\frac{1}{n}$

$T_n=\theta_1+\theta_2+\theta_3+\cdots+\theta_n=\tan^{-1}1+\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}+\cdots+\tan^{-1}\frac{1}{n}$ とする。

$y=\tan^{-1}x$ とすると $x=\tan y$ より，　$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}}=\cos^2 y$



したがって　$\frac{dy}{dx}=(\tan^{-1}x)'=\cos^2 y=\frac{1}{1+x^2}$

$f(x)=\tan^{-1}\frac{1}{x}$ のとき　　$f'(x)=(\tan^{-1}\frac{1}{x})'=\frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2}(\frac{1}{x})'=-\frac{1}{x^2+1}<0$

よって $f(x)$ は単調減少である。

区間　$k\leqq x\leqq k+1$　$(k>0)$ に対して　$\tan^{-1}\frac{1}{k}\geqq\tan^{-1}\frac{1}{x}\geqq\tan^{-1}\frac{1}{k+1}$

恒等的に等しくないので

$$\int_k^{k+1}\tan^{-1}\frac{1}{k}dx>\int_k^{k+1}\tan^{-1}\frac{1}{x}dx>\int_k^{k+1}\tan^{-1}\frac{1}{k+1}dx$$

$$\tan^{-1}\frac{1}{k}>\int_k^{k+1}\tan^{-1}\frac{1}{x}dx>\tan^{-1}\frac{1}{k+1}$$

第 1 項と第 2 項の関係から　$\sum_{k=1}^{n}\tan^{-1}\frac{1}{k}>\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\tan^{-1}\frac{1}{x}dx$

よって　$T_n>\int_1^{n+1}\tan^{-1}\frac{1}{x}dx$ が成り立つ。

右辺$=\int_1^{n+1}\tan^{-1}\frac{1}{x}dx=\int_1^{n+1}x'\tan^{-1}\frac{1}{x}dx$

$$=\left[x\tan^{-1}\frac{1}{x}\right]_1^{n+1}-\int_1^{n+1}x(\tan^{-1}\frac{1}{x})'dx$$

$$=(n+1)\tan^{-1}\frac{1}{n+1}-\tan^{-1}1-\int_1^{n+1}x\cdot(-\frac{1}{x^2+1})dx$$

$$=(n+1)\tan^{-1}\frac{1}{n+1}-\frac{\pi}{4}+\int_n^{n+1}\frac{x}{x^2+1}dx$$

$$=(n+1)\tan^{-1}\frac{1}{n+1}-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\int_n^{n+1}\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx$$

$$=(n+1)\tan^{-1}\frac{1}{n+1}-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}[\log(x^2+1)]_1^{n+1}$$

$$=(n+1)\tan^{-1}\frac{1}{n+1}-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\log(n^2+2n+2)-\frac{1}{2}\log 2$$

$$=(n+1)\tan^{-1}\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2}\log(n^2+2n+2)-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2$$

ここで $\lim_{n\to\infty}(n+1)\tan^{-1}\frac{1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\tan^{-1}\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0\ ,\lim_{n\to\infty}\tan^{-1}\frac{1}{n+1}=0$$

ロピタルの定理より

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)\tan^{-1}\frac{1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\tan^{-1}\frac{1}{n+1})'}{(\frac{1}{n+1})'}=\lim\frac{-\frac{1}{(n+1)^2+1}}{-\frac{1}{(n+1)^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n+2}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\log(n^2+2n+2)=\infty$$

$\lim_{n\to\infty}\mathrm{T}_n=\lim_{n\to\infty}(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\cdots+\theta_n)=\infty$ （無限大に発散する）

（別解）

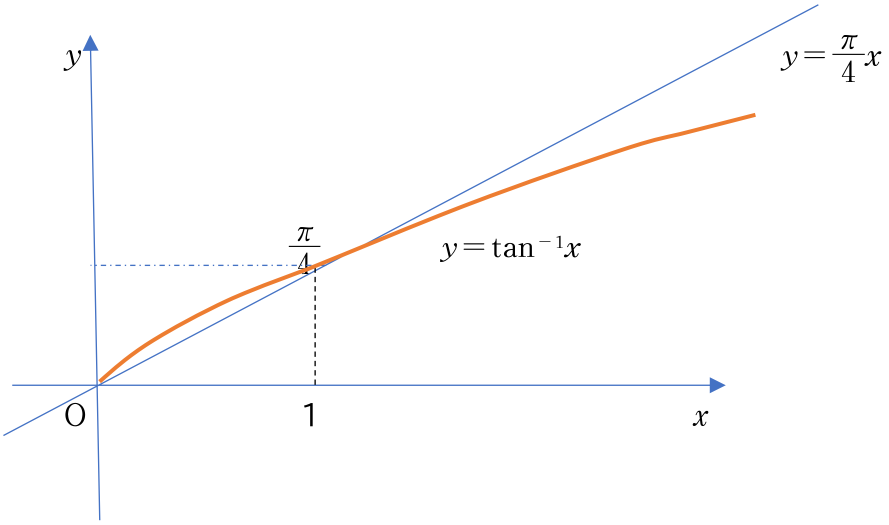
直線l: $y=\dfrac{\pi}{4}x$ と曲線C: $y=\tan^{-1}x$ は，いずれも原点O と点A$(1,\dfrac{\pi}{4})$ を通る。

$y=\tan^{-1}x$ は$y=\tan x$ の逆関数であり，グラフは互いに直線$y=x$ に関して対称である。

$$y'=(\tan^{-1}x)'=\frac{1}{1+x^2}>0$$

$y''=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$ より，$x>0$ のとき$y''<0$

$y=\tan x$ のグラフは，単調増加で$x>0$ のとき上に凸の曲線である。



$0\leqq x\leqq 1$ において　$\tan^{-1}x\geqq\dfrac{\pi}{4}x$

一般に　$x=\dfrac{1}{k}$ $(1\leqq k\leqq n)$　k,n は整数とする。

$$\tan^{-1}\frac{1}{k}\geqq\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{k}$$

よって

$$\sum_{k=1}^{n}\tan^{-1}\frac{1}{k}\geqq\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{k}$$

$$T_n\geqq\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

一方，$y=\dfrac{1}{x}$ は，単調減少だから$k>0$ のとき，

区間　$k \leqq x \leqq \dfrac{1}{k+1}$ において $\dfrac{1}{k} \geqq \dfrac{1}{x} \geqq \dfrac{1}{k+1}$

恒等的に等しくないので$\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k}dx > \int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx > \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}dx$

$\displaystyle\frac{1}{k+1} < \int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx < \frac{1}{k}$

したがって$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} < \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ ………②

①　②より

$$\mathrm{T}_n \geqq \frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} > \frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx = \frac{\pi}{4}\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx$$

よって$\mathrm{T}_n > \dfrac{\pi}{4}\Big[\log|x|\Big]_1^{n+1} = \dfrac{\pi}{4}\log(n+1)$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4}\log(n+1) = +\infty$ より$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\mathrm{T}_n = +\infty$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\ \mathrm{T}_n = \lim_{n\to\infty}\ (\theta_1+\theta_2+\theta_3+\cdots+\theta_n) = \infty$　（無限大に発散する）

数学散歩　３ ２直線のなす角

Q(3—1) 2直線$3x-y=0$, $2x+y-4=0$ のなす角θ $(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2})$ を求めよ。

（解） 2つの直線がx 軸の正の向きとのなす角をθ_1,θ_2 とおくと,

$$\tan\theta_1=3,\ \tan\theta_2=-2$$

$\theta=\theta_2-\theta_1$ より, $\tan\theta=\tan(\theta_2-\theta_1)=\dfrac{\tan\theta_2-\tan\theta_1}{1+\tan\theta_2\tan\theta_1}$

$$=\frac{-2-3}{1+(-2)\cdot 3}=1$$

$0\leqq\theta<\frac{\pi}{2}$ より, $\theta=\frac{\pi}{4}$

（別解） 直線の方向ベクトル$\vec{l_1}=(1,3)$, $\vec{l_2}=(1,-2)$
2つのベクトルのなす角をα $(0\leqq\alpha\leqq\pi)$ とする。

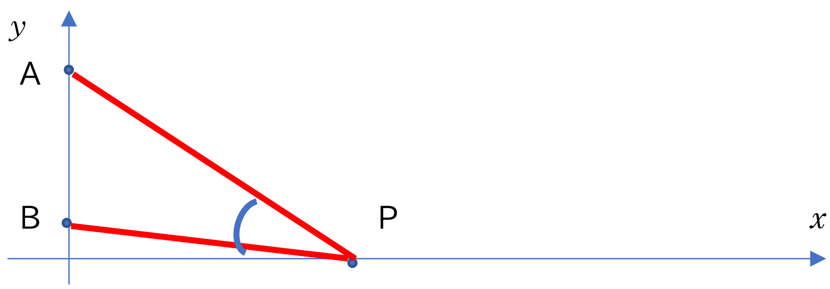
$$\cos\alpha=\frac{\vec{l_1}\cdot\vec{l_2}}{|\vec{l_1}||\vec{l_2}|}=\frac{1-6}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}}=-1$$

$0\leqq\alpha\leqq\pi$ より, $\alpha=\frac{3\pi}{4}$

$\theta=\alpha$ または$\theta=\pi-\alpha$ より, $\theta=\pi-\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$

数学散歩　４ 見込む角の最大

Q(4—1) xy 座標平面上に定点A$(0,2)$,B$(0,8)$ と動点P$(a,0)$ $(a>0)$ がある。
∠APB が最大となるa の値を求めよ。(自治医科大改題)



(正接の活用)

(解) 直線AP,BP がx 軸の正の向きとのなす角をθ_1,θ_2 とおくと,

$$\tan\theta_1=-\frac{2}{a}\,,\ \tan\theta_2=-\frac{8}{a}$$

$$\tan\angle APB=\tan(\theta_2-\theta_1)=\frac{\tan\theta_2-\tan\theta_1}{1+\tan\theta_2\tan\theta_1}$$

$$=\frac{-\frac{2}{a}+\frac{8}{a}}{1+\left(-\frac{2}{a}\right)\cdot\left(-\frac{8}{a}\right)}$$

$$=\frac{\frac{6}{a}}{1+\frac{16}{a^2}}$$

$$=\frac{6}{a+\frac{16}{a}}$$

$$\leqq\frac{6}{2\sqrt{a\cdot\frac{16}{a}}}=\frac{3}{4}$$

∠APB の最大値となるのは,tan∠APB が最大になるときだから

$a=\dfrac{16}{a}$　　　つまり, $a=4$

（余弦の活用）

（別解 1） 余弦定理より，

$$\cos\angle\mathrm{APB}=\frac{\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2-\mathrm{AB}^2}{2\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}}$$

$$=\frac{(a^2+4)+(a^2+64)-36}{2\sqrt{a^2+4}\cdot\sqrt{a^2+64}}$$

$$=\frac{2a^2+32}{2\sqrt{a^4+68a^2+256}}$$

$$=\frac{a^2+16}{\sqrt{(a^2+16)^2+36a^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{36a^2}{(a^2+16)^2}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{6a}{a^2+16})^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{6}{a+\frac{16}{a}})^2}}$$

$$\geqq\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{6}{2\sqrt{a\cdot\frac{16}{a}}})^2}}=\frac{4}{5}$$

$\angle\mathrm{APB}$ の最大値となるのは,$\cos\angle\mathrm{APB}$ が最小になるときだから

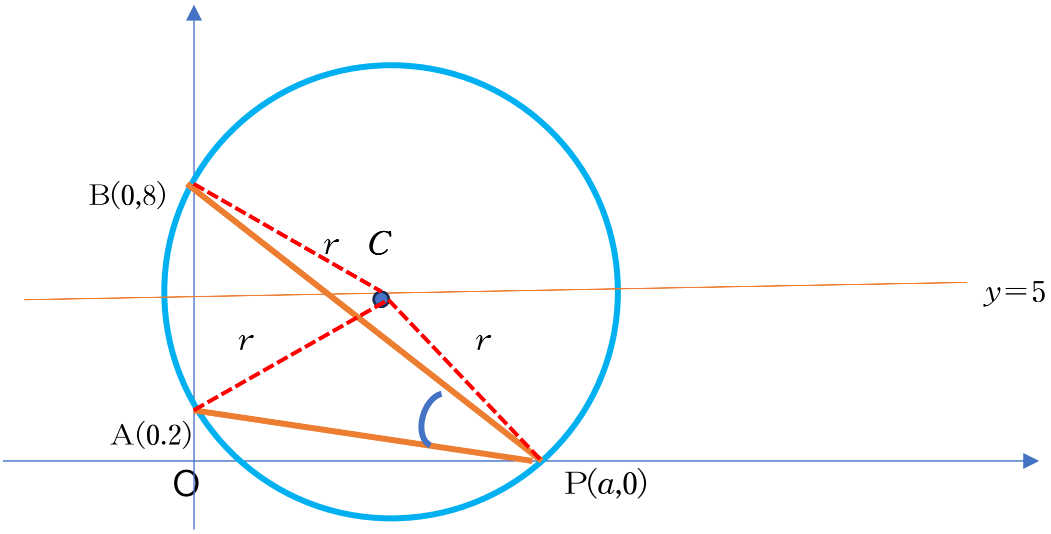
$a=\frac{16}{a}$　　つまり, $a=4$

（正弦の活用）
（別解２）余弦定理より，

$$\cos\angle APB = \frac{AP^2 + BP^2 - AB^2}{2AP \cdot BP}$$

$$= \frac{(a^2+4)+(a^2+64)-36}{2\sqrt{a^2+4}\cdot\sqrt{a^2+64}}$$

$$= \frac{a^2+16}{\sqrt{(a^2+16)^2+36a^2}} > 0$$ より，$0 \leqq \angle APB < \frac{\pi}{2}$



円Cの半径をrとするとき，
△PABにおいて正弦定理より，

$$\frac{AB}{\sin\angle APB} = 2r$$

$$\sin\angle APB = \frac{3}{2r}$$

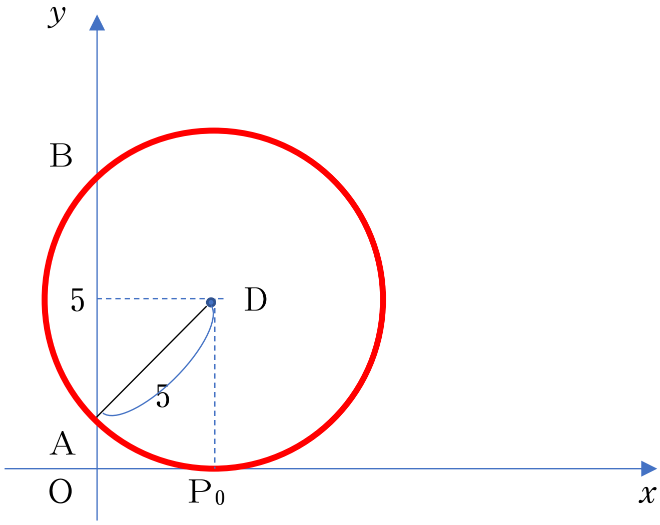
$0 \leqq \angle APB < \frac{\pi}{2}$において，$\angle APB$が最大となるのは，$\sin\angle APB$が最大となるときである。
つまり,円Cの半径　r　が最小になるときであり，
円Cがx軸に接するときである。
つまり,$r=5$
このときの円Cの中心は，点$(4,5)$で$P(4,0)$になる。

（円周角の活用）

（別解２）

２点A,B を通り，x 軸の正の部分と接する円をC とし，C の中心をD，C とx 軸との接点をP_0 とする。

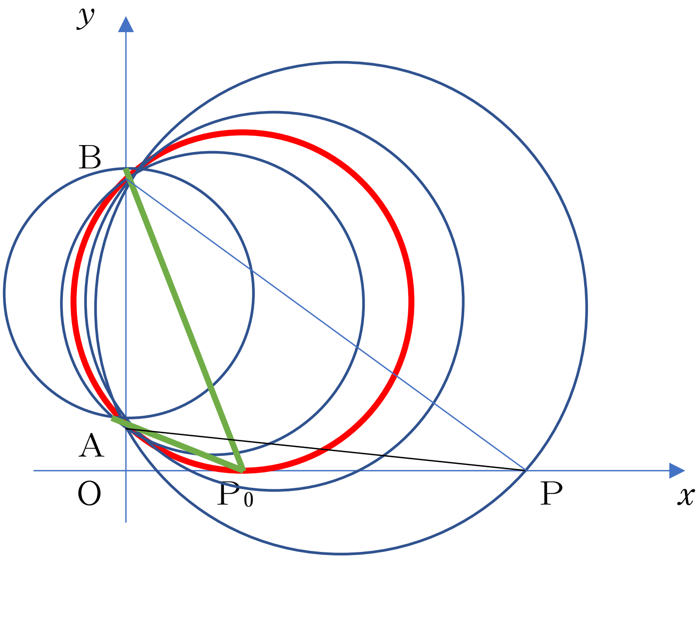
$\mathrm{D}(4,\,5)$，$\mathrm{P}_0(4,\,0)$ である。



x 軸上の正の部分を動く点を$\mathrm{P}(a{,}0)$ とすると，P_0 以外の点は，下図のよにC の外部にある。

同じ弦の円周角は半径が大きいほど小さくなるので

$\angle\mathrm{AP_0B} \leqq \mathrm{APB}$ より，$a=4$



数学散歩　５ 最大・最小

Q(5—1) 関数 $y=\dfrac{1-\sin\theta}{1+\cos\theta}$ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{2\pi}{3}\right)$の最大値と最小値を求めよ。

(解)

$\tan\dfrac{\theta}{2}=t$ とおく。

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{2\pi}{3}$ より，$0\leqq t\leqq\sqrt{3}$

ここで

$$\cos\theta=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

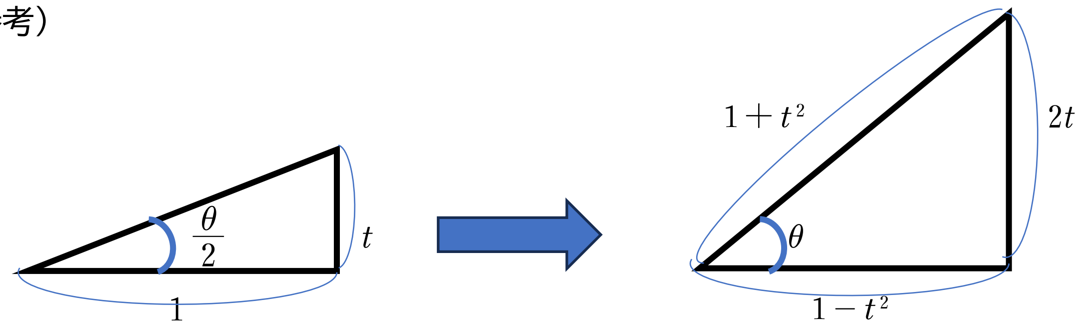
$$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$y=\frac{1-\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1-\dfrac{2t}{1+t^2}}{1+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}=\frac{1+t^2-2t}{2}=\frac{1}{2}(t-1)^2\qquad(0\leqq t\leqq\sqrt{3})$$

最大値は $\dfrac{1}{2}$ $(t=0)$　つまり　$\theta=0$ のとき

最小値は 0 $(t=1)$　つまり　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき

(参考)



$\tan\dfrac{\theta}{2}=t$

$\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$　$\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$　$\tan\theta=\dfrac{2t}{1-t^2}$

（別解１）

$y=\dfrac{1-\sin\theta}{1+\cos\theta}$ より，

$$y'=\frac{(1-\sin\theta)'(1+\cos\theta)-(1-\sin\theta)(1+\cos\theta)'}{(1+\cos\theta)^2}$$

$$=\frac{-\cos\theta(1+\cos\theta)-(1-\sin\theta)(-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)^2}$$

$$=\frac{-\cos\theta+\sin\theta-1}{(1+\cos\theta)^2}$$

$y'=0$ は　分子＝$-\cos\theta+\sin\theta-1=\sqrt{2}\sin(\theta-\frac{\pi}{4})-1=0$

$\sin(\theta-\frac{\pi}{4})=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$-\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta-\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{5\pi}{12}$ より，$\theta-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}$

$\theta=\dfrac{\pi}{2}$

増減表は，

θ	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$
y'		$-$	0	$+$	
y	$\frac{1}{2}$	↘	0	↗	$2-\sqrt{3}$

最大値は $\dfrac{1}{2}$ （$\theta=0$） 最小値は 0 （$\theta=\dfrac{\pi}{2}$）

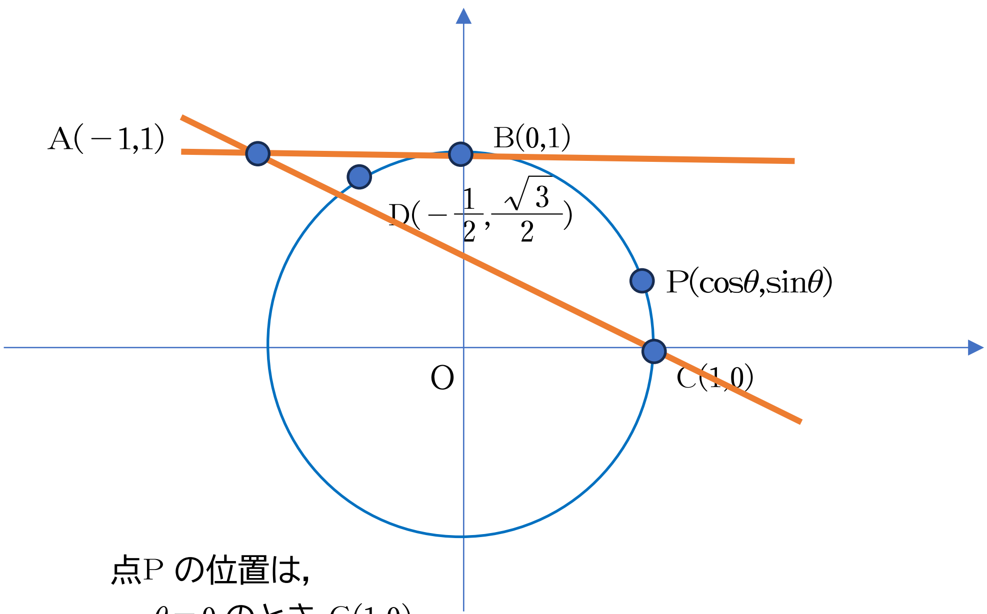
（別解２）

$$y=\frac{1-\sin\theta}{1+\cos\theta}==-\frac{1-\sin\theta}{(-1)-\cos\theta}$$

$$-y=\frac{1-\sin\theta}{(-1)-\cos\theta}$$

定点A$(-1,1)$と　動点P$(\cos\theta,\sin\theta)$とおくと,

$-y$は,直線APの傾きを表す。



点Pの位置は,

$\theta=0$のとき,C$(1,0)$

$\theta=\frac{\pi}{2}$のとき, B$(0,1)$

$\theta=\frac{2\pi}{3}$のとき, D$(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$

傾き$-y$が, 取り得る値の範囲は,　$-\frac{1}{2}\leqq -y\leqq 0$

よってyの取り得る値の範囲は,　　$0\leqq y\leqq\frac{1}{2}$

最大値は　$\frac{1}{2}$　$(\theta=0)$　　最小値は　0　$(\theta=\frac{\pi}{2})$

数学散歩　6 積分

Q(6-1) $I_n=\int \tan^n x dx$ とするとき, I_1, I_2 を求めよ。

また, I_n と I_{n-2} の関係式を作り, I_3, I_4, I_5, I_6 を求めよ。

$$I_1=\int \tan x dx=\int \frac{\sin x}{\cos x}dx=\int \frac{-(\cos x)'}{\cos x}dx \quad =-\log|\cos x|+c$$ (c は積分定数)

$$I_2=\int \tan^2 x dx=\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx$$

$$=\int (\frac{1}{\cos^2 x}-1)dx=\tan x-x+c$$

$$I_n=\int \tan^n x dx=\int \tan^2 x \tan^{n-2} x\, dx$$

$$=\int (\frac{1}{\cos^2 x}-1)\tan^{n-2} x\, dx=\int \frac{\tan^{n-2} x}{\cos^2 x}dx-\int \tan^{n-2} x dx$$

$$=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x-\int \tan^{n-2} x dx=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x-I_{n-2}$$

$$I_3=\frac{1}{2}\tan^2 x-I_1=\frac{1}{2}\tan^2 x-(-\log|\cos x|)+c=\frac{1}{2}\tan^2 x+\log|\cos x|+c$$

$$I_4=\frac{1}{3}\tan^{3x}-I_2=\frac{1}{3}\tan^3 x-(\tan x-x)+c=\frac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+x+c$$

$$I_5=\frac{1}{4}\tan^4 x-I_3=\frac{1}{4}\tan^4 x-(\frac{1}{2}\tan^2 x+\log|\cos x|)+c$$

$$=\frac{1}{4}\tan^4 x-\frac{1}{2}\tan^2 x-\log|\cos x|+c$$

$$I_6=\frac{1}{5}\tan^5 x-I_4=\frac{1}{5}\tan^5 x-(\frac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+x)+c$$

$$=\frac{1}{5}\tan^5 x-\frac{1}{3}\tan^3 x+\tan x-x+c$$

（参考）

$$\mathrm{I}_{2m+1}=\frac{1}{2m}\tan^{2m}x-\frac{1}{2m-4}\tan^{2m-4}x+\frac{1}{2m-6}\tan^{2m-6}x-\cdots$$

$$+\cdots+(-1)^{m-1}\left\{\frac{1}{2}\tan^{2}x+\log|\cos x|\right\}+c$$

$$\mathrm{I}_{2m}=\frac{1}{2m-1}\tan^{2m-1}x-\frac{1}{2m-3}\tan^{2m-3}x+\frac{1}{2m-5}\tan^{2m-5}x-\cdots$$

$$+\cdots+(-1)^{m-1}(\tan x-x)+c$$

（積分）

Q(6-2) $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\sin\theta + 3\cos\theta + 3}$ を，$\tan\dfrac{\theta}{2} = t$ とおいて求めよ。

$\tan\dfrac{\theta}{2} = t$ より，

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \left(1 + \tan^2\frac{\theta}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1+t^2}{2}$$

$$\int \frac{d\theta}{\sin\theta + 3\cos\theta + 3} = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{3(1-t^2)}{1+t^2} + 3} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$= \int \frac{2}{2t + 3(1-t^2) + 3(1+t^2)}\,dt$$

$$= \int \frac{2}{2t+6}\,dt$$

$$= \int \frac{1}{t+3}\,dt = \log|t+3| + c = \log\left|\tan\frac{\theta}{2} + 3\right| + c$$

（c は積分定数）