テーブルのガタガタ

東書 WEB：つい考えてしまう記事【#7】補遺

矢崎成俊

正方形配置の 4 本脚のテーブルがある。

【疑問】テーブルがガタガタする。ガタガタしない位置はあるだろうか。

【答え】ある。中間値の定理を使って証明できる。

【簡単な説明】脚の番号を反時計回りに 1,2,3,4 とし，脚 2,3,4 を通る平面を P とする。(1) 脚 2,4 が床の上で，1,3 方向にテーブルがガタガタするとき，脚 1 は平面 P の下側にある。(2) テーブルを回転させて，脚 1,3 が床の上で，2,4 方向にテーブルがガタガタするようになった。このとき，脚 1 は平面 P の上側にある。(1)(2) と中間値の定理より，脚 1 は平面 P 内にあるテーブルの回転角が存在する。 ■

【詳しい証明】各脚は単位円周上に正方形に配置されていて，単位円周上のゆがんでいる床の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}(\theta) \in \mathbb{R}^3$ とする。脚の番号を反時計回りに 1,2,3,4 とし，i 番目の脚に対応する床の位置ベクトルを $\boldsymbol{x}_i$ とし，それぞれ次のように表す。

$$\boldsymbol{x}_1(\theta) = \boldsymbol{x}(\theta),\ \boldsymbol{x}_2(\theta) = \boldsymbol{x}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right),\ \boldsymbol{x}_3(\theta) = \boldsymbol{x}(\theta + \pi),\ \boldsymbol{x}_4(\theta) = \boldsymbol{x}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$$

弧度 θ を固定したとき，3 点 $\boldsymbol{x}_2(\theta), \boldsymbol{x}_3(\theta), \boldsymbol{x}_4(\theta)$ を通る平面は一意に定まる。この平面を P_θ とする。$\boldsymbol{x}_1(\theta)$ が P_θ 上の点であれば，4 本脚は同一平面上に乗っているのでガタガタはしない。平面 P_θ の上向きの (つまり z 成分がつねに正の) 法線ベクトルを $\boldsymbol{n}(\theta)$ とする。

テーブルがガタガタする場合は，$\boldsymbol{x}_1$ が平面 P_θ 上にないときで，それは次の二通りある。

(1) 2 本の脚を床の $\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_4$ に乗るようにして，他の 2 本の脚が床の $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3$ から浮いているとき。このとき，$\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_4$ を結ぶ直線を軸に，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3$ 方向にそれぞれガタガタする。3 点 $\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$ に脚が乗るようにテーブルを傾けると，$\boldsymbol{x}_1$ は平面 P_θ の下側，つまり $-\boldsymbol{n}$ 方向側にある。

(2) 2 本の脚を床の $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3$ に乗るようにして，他の 2 本の脚が床の $\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_4$ から浮いているとき。このとき，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3$ を結ぶ直線を軸に，$\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_4$ 方向にそれぞれガタガタする。3 点 $\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$ に脚が乗るようにテーブルを傾けると，$\boldsymbol{x}_1$ は平面 P_θ の上側，つまり $\boldsymbol{n}$ 方向側にある。

関数 F を

$$F(\theta) = \boldsymbol{n}(\theta) \cdot (\boldsymbol{x}_1(\theta) - \boldsymbol{x}_3(\theta))$$

とおく。明記していないが床は連続な曲面としているので，関数 F は連続である。(1) の場合は $F < 0$ で，(2) の場合は $F > 0$ である。

いま，ある $\theta_1 < \theta_2$ があって，

$$F(\theta_1) < 0, \quad F(\theta_2) > 0$$

であったとする。このとき，中間値の定理から $F(\theta_0) = 0$ をみたす $\theta_0 \in (\theta_1, \theta_2)$ が存在する。よって，$\boldsymbol{x}_1(\theta_0)$ は $\boldsymbol{x}_2(\theta_0), \boldsymbol{x}_3(\theta_0), \boldsymbol{x}_4(\theta_0)$ を通る平面 P_{θ_0} 上にあり，4 本の脚は同一平面上に乗っているのでガタガタしない。つまり，(1) の状態にテーブルがあってガタガタして，テーブルを回転させて (2) の状態になって (1) とは直交する方向にガタガタしたとき，(1) と (2) の間にガタガタしない位置が必ずあることを中間値の定理は教えてくれる。

【疑問の深掘り】テーブルはガタガタしなくなった。このとき，平面 P_{θ_0} は水平だろうか。多少傾いているだろうか。

【答え】法線ベクトルを $\boldsymbol{n}(\theta) = (a(\theta), b(\theta), 1)$ とおいたとき，$(a(\theta_0), b(\theta_0)) = (0, 0)$ のとき平面 P_{θ_0} は水平で，$(a(\theta_0), b(\theta_0)) \neq (0, 0)$ のとき平面 P_{θ_0} は水平でない。

$a(\theta), b(\theta)$ を求めよう。ゆがんでいる床の高さを弧度 θ に対して連続関数 $f(\theta)$ で表すと，床の位置ベクトルは，

$$\boldsymbol{x}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, f(\theta))$$

となる。このとき，i 番目の脚に対応する床の位置ベクトル $\boldsymbol{x}_i$ は，それぞれ次のように表される。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_1(\theta) &= \boldsymbol{x}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, f_1(\theta)), & f_1(\theta) &= f(\theta) \\
\boldsymbol{x}_2(\theta) &= \boldsymbol{x}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = (-\sin\theta, \cos\theta, f_2(\theta)), & f_2(\theta) &= f\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \\
\boldsymbol{x}_3(\theta) &= \boldsymbol{x}(\theta + \pi) = (-\cos\theta, -\sin\theta, f_3(\theta)), & f_3(\theta) &= f(\theta + \pi) \\
\boldsymbol{x}_4(\theta) &= \boldsymbol{x}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = (\sin\theta, -\cos\theta, f_4(\theta)), & f_4(\theta) &= f\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

a, b についての連立 1 次方程式

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3) = 0, \quad \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{x}_4 - \boldsymbol{x}_3) = 0$$

を解いて，

$$\begin{pmatrix} a(\theta) \\ b(\theta) \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos\theta - \sin\theta & \cos\theta + \sin\theta \\ \cos\theta + \sin\theta & -(\cos\theta - \sin\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2(\theta) - f_3(\theta) \\ f_4(\theta) - f_3(\theta) \end{pmatrix}$$

を得る。こうして得られた $\boldsymbol{n}(\theta) = (a(\theta), b(\theta), 1)$ は，外積を用いた表現

$$\boldsymbol{n}(\theta) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_4(\theta) - \boldsymbol{x}_3(\theta)) \times (\boldsymbol{x}_2(\theta) - \boldsymbol{x}_3(\theta))$$

に等しいが，上の連立 1 次方程式を解く方が楽である。

いずれにせよ，これより，

$$F(\theta) = f_1(\theta) - f_2(\theta) + f_3(\theta) - f_4(\theta)$$

がわかる。

さて，

$$a(\theta)^2 + b(\theta)^2 = \frac{1}{2}\left((f_2(\theta) - f_3(\theta))^2 + (f_4(\theta) - f_3(\theta))^2\right)$$

であるので，$f_2(\theta_0) = f_3(\theta_0) = f_4(\theta_0)$ でない限り平面 P_{θ_0} は水平でない。現実的には，いくらテーブルがガタガタしなくても厳密に $\boldsymbol{n}(\theta_0) = (0, 0, 1)$ が成立することは難しいだろうが，もし平面 P_{θ_0} は水平であると感じるならば，それは人間の感知能力の範囲内で $\boldsymbol{n}(\theta_0) \approx (0, 0, 1)$ が成立していることを意味している。