3 月 2 問目

n を自然数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　すべての n に対して，不等式 $n < \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ が成り立つことを示せ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$ が成り立つことを示せ。

(3)　すべての n に対して，不等式 $\dfrac{n(n+1)}{2} < 3\left(\dfrac{3}{2}\right)^n - 3$ が成り立つことを示せ。

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$ が成り立つことを示せ。

/'23 静岡大（理・工・情報）前期 2

解 答

(1)　すべての自然数 n に対して，不等式

$$n < \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad (\text{この不等式を } P(n) \text{ とする})$$

が成り立つことを数学的帰納法で示す。

(I)　$P(k)$ が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} - (k+1) &= \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^k - (k+1)\\ &> \frac{3}{2}\cdot k - (k+1) \quad (\because\ P(k))\\ &= \frac{1}{2}k - 1\end{aligned}$$

ここで $\dfrac{1}{2}k - 1 \geqq 0$ となるのは $k \geqq 2$ のときだから

$$k \geqq 2 \text{ において，} P(k) \text{ ならば } P(k+1)$$

が成り立つ。

(II)　また

$n=1$ のとき $\left(\dfrac{3}{2}\right)^n = \dfrac{3}{2} > 1$

$n=2$ のとき $\left(\dfrac{3}{2}\right)^n = \dfrac{9}{4} > 2$

なので，$P(1)$，$P(2)$ も成り立つ。

(I)(II) より，すべての自然数 n に対して，不等式 $P(n)$ が成り立つ。 ■

(2)　$n > 0$ と不等式 $P(n)$ から

$$0 < n\left(\frac{3}{5}\right)^n < \left(\frac{3}{2}\right)^n\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n = \left(\frac{9}{10}\right)^n$$

が成り立ち

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^n = 0$$

であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$$

■

(3)　(1) の結果から

$$\sum_{k=1}^{n} k < \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{2}\right)^k$$

が成り立ち

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{2}\right)^k = \frac{3}{2}\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{\frac{3}{2} - 1} = 3\left(\frac{3}{2}\right)^n - 3$$

であるから

$$\frac{n(n+1)}{2} < 3\left(\frac{3}{2}\right)^n - 3$$

が成り立つ。 ■

(4)　(3) の結果から

$$n^2 < -n + 6\left(\frac{3}{2}\right)^n - 6$$

とでき，$n > 0$ なので

$$0 < n^2\left(\frac{3}{5}\right)^n < -n\left(\frac{3}{5}\right)^n + 6\left(\frac{9}{10}\right)^n - 6\left(\frac{3}{5}\right)^n$$

が成り立つ。ここで，(2) の結果も考慮して

$$\lim_{n\to\infty}\left\{-n\left(\frac{3}{5}\right)^n + 6\left(\frac{9}{10}\right)^n - 6\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\} = 0$$

なので，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$$

■