3 月 1 問目

$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ について，$7\cdot 2^{2n-1}+3^{3n-1}$ は 23 の倍数であることを，数学的帰納法で証明せよ。

/'23 小樽商科大（商）前期 2

解答

$a_n=7\cdot 2^{2n-1}+3^{3n-1}\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とすると

$$\begin{aligned} a_{n+1}&=7\cdot 2^{2(n+1)-1}+3^{3(n+1)-1}\\ &=7\cdot 2^2\cdot 2^{2n-1}+3^3\cdot 3^{3n-1}\\ &=7\cdot 4\cdot 2^{2n-1}+27\cdot 3^{3n-1}\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} a_{n+1}-27a_n&=7\cdot 4\cdot 2^{2n-1}-7\cdot 27\cdot 2^{2n-1}\\ &=-7\cdot 23\cdot 2^{2n-1}\quad\cdots\cdots(*)\end{aligned}$$

が成り立つ。

さて，すべての自然数 n に対して a_n は 23 の倍数であることを，数学的帰納法で示す。

(I)　$a_1=7\cdot 2^1+3^2=23$ である。

(II)　a_k が 23 の倍数であると仮定すると

$$a_k=23A_k\ \ (A_k\text{：整数})$$

と表せて，$(*)$ より

$$\begin{aligned} &a_{k+1}-27a_k=-7\cdot 23\cdot 2^{2k-1}\\ \therefore\ \ &a_{k+1}-27\cdot 23A_k=-7\cdot 23\cdot 2^{2k-1}\\ \therefore\ \ &a_{k+1}=23(27A_k-7\cdot 2^{2k-1})\end{aligned}$$

とできる。

ここで，$27A_k-7\cdot 2^{2k-1}$ は整数なので，a_{k+1} は 23 の倍数である。

(I)(II) より，すべての自然数 n に対して a_n は 23 の倍数である。 ■

（参考）　数学的帰納法を用いなくてもよいのであれば，次のように示すこともできる。

a_n は

$$\begin{aligned} a_n&=7\cdot 2^{2n-1}+3^{3n-1}\\ &=7\cdot 2^{2(n-1)+1}+3^{3(n-1)+2}\\ &=7\cdot 2\cdot 2^{2(n-1)}+3^2\cdot 3^{3(n-1)}\\ &=14\cdot 4^{n-1}+9\cdot 27^{n-1}\end{aligned}$$

とできる。ここで，27^{n-1} は

$$\begin{aligned} 27^{n-1}&=(23+4)^{n-1}\\ &=23B_{n-1}+4^{n-1}\quad(B_n\text{：整数})\end{aligned}$$

と書けるので

$$\begin{aligned} a_n&=14\cdot 4^{n-1}+9\cdot(23B_{n-1}+4^{n-1})\\ &=23\cdot 4^{n-1}+9\cdot 23B_{n-1}\\ &=23(4^{n-1}+9B_{n-1})\end{aligned}$$

$4^{n-1}+9B_{n-1}$ は整数なので，a_n は 23 の倍数である。

■