（資料1－②）

高さ1の直角三角形で4つの角の和が$\frac{\pi}{4}$になるのは何通りあるか。

$$abcd-ab-ac-ad-bc-bd-cd+1$$
$$=abc+abd+acd+bcd-a-b-c-d$$

$\frac{\pi}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{\pi}{16}$ より$\tan\frac{\pi}{16}=\frac{1}{n}$ となるn を調べる。

$$\tan\frac{\pi}{16}=\sqrt{4+2\sqrt{2}}-(\sqrt{2}+1)\fallingdotseq 2.6131-2.4142=0.1989=\frac{1}{5.027}$$

整数$n\geqq 6$ だから　a,b,c,d のうち，最小のa は　$a\leqq 5$ である。

なおかつ$a=1$ は$\theta>\frac{\pi}{4}$ となり不適である。

したがって，$2\leqq a\leqq 5$

（1）$a=2$ のとき，

$$abcd-ab-ac-ad-bc-bd-cd+1$$
$$=abc+abd+acd+bcd-a-b-c-d$$

$$2bcd-2b-2c-2d-bc-bd-cd+1$$
$$=2bc+2bd+2cd+bcd-2-b-c-d$$

$bcd+3=3bc+3bd+3cd+b+c+d$ ･･･････①

$bcd<bcd+3=3bc+3bd+3cd+b+c+d\leqq 9cd+3d$

$bc<9c+3$

$b<9+\frac{3}{c}$

$c\geqq 2$ より　$2\leqq b\leqq 10$

（ア）$b=2$ のとき，①は　$2cd+3=6c+6d+3cd+2+c+d$

$cd+7c+7d=1$ （不適）

（イ）$b=3$ のとき，①は　$3cd+3=9c+9d+3cd+3+c+d$

$10c+10d=0$ （不適）

（ウ）$b=4$ のとき，①は　$4cd+3=12c+12d+3cd+4+c+d$

$cd-13c-13d=1$

$(c-13)(d-13)=170$

$(c-13)\leqq(d-13)$ より

$(c-13,d-13)=(1,170),(2,85),(5,34),(10,17)$

$(c,d)=(14,183),(15,98),(18,47),(23,30)$

求める$(a,b,c,d)=(2,4,14,183),(2,4,15,98),(2,4,18,47),(2,4,23,30)$

(エ) $b=5$ のとき, ①は$5cd+3=15c+15d+3cd+5+c+d$

$2cd-16c-16d=2$

$cd-8c-8d=1$

$(c-8)(d-8)=65$

$(c-8)\leqq(d-8)$ より

$(c-8,d-8)=(1,65),(5,13)$

$(c,d)=(9,73),(13,21)$

求める$(a,b,c,d)=(2,5,9,73),(2,5,13,21)$

(オ)$b=6$ のとき, ①は $6cd+3=18c+18d+3cd+6+c+d$

$3cd-19c-19d=3$

$9cd-57c-57d=9$

$(3c-19)(3d-19)=370$

$(3c-19)\leqq(3d-19)$ より

$(3c-19,3d-19)=(1,370),(2,185),(5,74),(10,37)$

$(c,d)=(6,\frac{389}{3}),(7,68),(8,31),(\frac{29}{3},\frac{56}{3})$

求める$(a,b,c,d)=(2,6,7,68),(2,6,8,31)$

(カ)$b=7$ のとき, ①は $7cd+3=21c+21d+3cd+7+c+d$

$4cd-22c-22d=4$

$(2c-11)(2d-11)=125$

$(2c-11)\leqq(2d-11)$ より

$(2c-11,2d-11)=(1,125),(5,25)$

$(c,d)=(6,68),(8,18)$

$c\geqq b$ より$(c,d)=(6,68)$ は不適

求める$(a,b,c,d)=(2,7,8,18)$

(キ)$b=8$ のとき, ①は $8cd+3=24c+24d+3cd+8+c+d$

$5cd-25c-25d=5$

$cd-5c-5d=1$

$(c-5)(d-5)=26$

$(c-5)\leqq(d-5)$ より

$(c-5,d-5)=(1,26),(2,13)$

$(c,d)=(6,31),(7,18)$

$c\geqq 8$ より不適

(ク) $b=9$ のとき, ①は $9cd+3=27c+27d+3cd+9+c+d$

$6cd-28c-28d=6$

$3cd-14c-14d=3$

$9cd-42c-42d=9$

$(3c-14)(3d-14)=205$

$(3c-14)\leqq(3d-14)$ より

$(3c-14,3d-14)=(1,205),(5,41)$

$(c,d)=(5,73),(\frac{19}{3},\frac{55}{3})$

$c\geqq 9$ より不適

(ケ) $b=10$ のとき, ①は $10cd+3=30c+30d+3cd+10+c+d$

$7cd-31c-31d=7$

$49cd-217c-217d=49$

$(7c-31)(7d-31)=1010$

$c\geqq 10$ より $7c-31\geqq 39$

$39\leqq(7c-31)\leqq(7d-31)$ より

$(7c-31)(7d-31)\geqq 1521$ で不適

(2) $a=3$ のとき,

$abcd-ab-ac-ad-bc-bd-cd+1$
$=abc+abd+acd+bcd-a-b-c-d$

$3bcd-3b-3c-3d-bc-bd-cd+1$
$=3bc+3bd+3cd+bcd-3-b-c-d$

$2bcd+4=4bc+4bd+4cd+2b+2c+2d$

$bcd+2=2bc+2bd+2cd+b+c+d$ …………①

$bcd<bcd+2=2bc+2bd+2cd+b+c+d\leqq 6cd+3d$

$bc<6c+3$

$b<6+\frac{3}{c}$

$c\geqq 3$ より $3\leqq b\leqq 6$

(ア)$b=3$ のとき，　$bcd+2=2bc+2bd+2cd+b+c+d$ ･･･①

$3cd+2=6c+6d+2cd+3+c+d$

$cd-7c-7d=1$

$(c-7)(d-7)=50$

$(c-7)\leqq(d-7)$ より

$(c-7,d-7)=(1,50),(2,25),(5,10)$

$(c,d)=(8,57),(9,32),(12,17)$

求める$(a,b,c,d)=(3,3,8,57),(3,3,9,32),(3,3,12,17)$

(イ)$b=4$ のとき，　$bcd+2=2bc+2bd+2cd+b+c+d$ ･･①

$4cd+2=8c+8d+2cd+4+c+d$

$2cd-9c-9d=2$

$4cd-18c-18d=4$

$(2c-9)(2d-9)=85$

$(2c-9)\leqq(2d-9)$ より

$(2c-9,2d-9)=(1,85),(5,17)$

$(c,d)=(5,47),(7,13)$

$c\geqq4$ より　求める　$(a,b,c,d)=(3,4,5,47),(3,4,7,13)$

(ウ)$b=5$ のとき，　$bcd+2=2bc+2bd+2cd+b+c+d$ ･･①

$5cd+2=10c+10d+2cd+5+c+d$

$3cd-11c-11d=3$

$9cd-33c-33d=9$

$(3c-11)(3d-11)=130$

$(3c-11)\leqq(3d-11)$ より

$(3c-11,3d-11)=(1,130),(2,65),(5,26),(10,13)$

$(c,d)=(4,47),(\frac{13}{3},\frac{76}{3}),(\frac{16}{3},\frac{37}{3}),(7,8)$

$c\geqq5$ より　求める$(a,b,c,d)=(3,5,7,8)$

(エ)$b=6$ のとき,　$bcd+2=2bc+2bd+2cd+b+c+d$ ‥①

$6cd+2=12c+12d+2cd+6+c+d$

$4cd-13c-13d=4$

$16cd-52c-52d=16$

$(4c-13)(4d-13)=185$

$(4c-13)\leqq(4d-13)$ より

$(4c-13,4d-13)=(1,185),(5,37)$

$(c,d)=(\frac{7}{2},\frac{99}{2}),(\frac{9}{2},\frac{25}{2})$ より不適

(3)$a=4$ のとき,　$abcd-ab-ac-ad-bc-bd-cd+1$
$=abc+abd+acd+bcd-a-b-c-d$

$4bcd-4b-4c-4d-bc-bd-cd+1$
$=4bc+4bd+4cd+bcd-4-b-c-d$

$3bcd+5=5bc+5bd+5cd+3b+3c+3d$ ‥‥‥‥①

$3bcd<3bcd+5=5bc+5bd+5cd+3b+3c+3d\leqq 15cd+9d$

$bc<5c+3$ より　$b<5+\frac{3}{c}$

$c\geqq b\geqq 4$ より, $b=4$ または$b=5$ である。

(ア)$b=4$ のとき,　$12cd+5=20c+20d+5cd+12+3c+3d$

$7cd-23c-23d=7$

$49cd-161c-161d=49$

$(7c-23)(7d-23)=578$

$7c-23\leqq 7d-23$ より

$(7c-23,7d-23)=(1,578),(2,289)$

$(c,d)=(\frac{24}{7},\frac{601}{7}),(\frac{25}{7},\frac{312}{7})$ より不適

(イ)$b=5$ のとき,　$15cd+5=25c+25d+5cd+15+3c+3d$

$10cd-28c-28d=10$

$25cd-70c-70d=25$

$(5c-14)(5d-14)=221$

$5c-14\leqq 5d-14$ より

$(5c-14,5d-14)=(1,221)$

$(c,d)=(3,47)$　　$b\geqq c$ となり不適

(4)$a=5$ のとき,
$$abcd-ab-ac-ad-bc-bd-cd+1$$
$$=abc+abd+acd+bcd-a-b-c-d$$

$$5bcd-5b-5c-5d-bc-bd-cd+1$$
$$=5bc+5bd+5cd+bcd-5-b-c-d$$

$$4bcd+6=6bc+6bd+6cd+4b+4c+4d \cdots\cdots\text{①}$$

$$4bcd<4bcd+6=6bc+6bd+6cd+4b+4c+4d\leqq 18cd+12d$$

$$4bc<18c+12$$

$b<\dfrac{9}{2}+\dfrac{3}{c}$　これは$c\geqq 5$ より,$b=5,c=5$ 以外にない。

このとき,
$$100d+6=150+30d+30d+20+20+4d$$
$$36d=184$$
$d=\dfrac{46}{9}$ 不適

したがって$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ は,以下の15通り。

$(a,b,c,d)=(2,4,14,183),(2,4,15,98),(2,4,18,47),(2,4,23,30)$

$(a,b,c,d)=(2,5,9,73),(2,5,13,21)$

$(a,b,c,d)=(2,6,7,68),(2,6,8,31)$

$(a,b,c,d)=(2,7,8,18)$

$(a,b,c,d)=(3,3,8,57),(3,3,9,32),(3,3,12,17)$

$(a,b,c,d)=(3,4,5,47),(3,4,7,13)$

$(a,b,c,d)=(3,5,7,8)$

(まとめ) 高さ1の4つの直角三角形の鋭角の和 $\theta=\frac{\pi}{4}$ は, 以下の 15通り

(ア) $(a,b,c,d)=(2,4,14,183)$ ･･･(2, 1), (4, 1), (14,1), (183, 1) の三角形
(イ) $(a,b,c,d)=(2,4,15,98)$ ････(2, 1), (4, 1), (15, 1), (98, 1) の三角形
(ウ) $(a,b,c,d)=(2,4,18,47)$ ････(2, 1), (4, 1), (18, 1), (47, 1) の三角形
(エ) $(a,b,c,d)=(2,4,23,30)$ ････(2, 1), (4, 1), (23, 1), (30, 1) の三角形
(オ) $(a,b,c,d)=(2,5,9,73)$ ･････(2, 1), (5, 1), (9, 1), (73, 1) の三角形
(カ) $(a,b,c,d)=(2,5,13,21)$ ････(2, 1), (5, 1), (13, 1), (21, 1) の三角形
(キ) $(a,b,c,d)=(2,6,7,68)$ ････(2, 1), (6, 1), (7, 1), (68, 1) の三角形
(ク) $(a,b,c,d)=(2,6,8,31)$ ･････(2, 1), (6, 1), (8, 1), (31, 1) の三角形
(ケ) $(a,b,c,d)=(2,7,8,18)$ ･････(2, 1), (7, 1), (8, 1), (18, 1) の三角形
(コ) $(a,b,c,d)=(3,3,8,57)$ ･････(3, 1), (3, 1), (8, 1), (57, 1) の三角形
(サ) $(a,b,c,d)=(3,3,9,32)$ ･････(3, 1), (3, 1), (9, 1), (32, 1) の三角形
(シ) $(a,b,c,d)=(3,3,12,17)$ ････(3, 1), (3, 1), (12, 1), (17, 1) の三角形
(ス) $(a,b,c,d)=(3,4,5,47)$ ･････(3, 1), (4, 1), (5, 1), (47, 1) の三角形
(セ) $(a,b,c,d)=(3,4,7,13)$ ･････(3, 1), (4, 1), (7, 1), (13, 1) の三角形
(ソ) $(a,b,c,d)=(3,5,7,8)$ ･･････(3, 1), (5, 1), (7, 1), (8, 1) の三角形