**（資料3―③）**

（1，1）＝（2，1）＋（3，1）において，（3，1）を3つに分ける連鎖探索法ではどのように表現できるか。（算出11）（1，1）＝（2，1）＋（6，1）＋（7，1）＋（68，1）は導けるか。

$(n,1)=(n+x,1)+(n+y,1)+(n+z,1)$　ただし，$1\leqq x\leqq y\leqq z$ とすると，

$(n^2+1)\{2n+(x+y+z)\}=xyz$ ・・・・(※)

$n=3$ のとき，(※)は　$10(6+x+y+z)=xyz$

$(xy-10)z=10(x+y+6)$ ・・・・・①

$xy=10$ のとき，①より　$0=5(x+y+4)$ となり不適。よって$xy\geqq 11$

また，$xyz=60+10(x+y+z)\leqq 60+30z$ より
　　$60\geqq z(xy-30)$ ・・・・・・・②

（1）$xy=11$ のとき，$z=10(x+y+6)$
　　これを満たす $(x,y,z)=(1,11,180)$

（2）$xy=12$ のとき，$z=\dfrac{10(x+y+6)}{2}=5(x+y+6)$
　　これを満たす $(x,y,z)=(1,12,95),(2,6,70),(3,4,65)$

（3）$xy=13$ のとき，$z=\dfrac{10(x+y+6)}{3}$
　　これを満たす $(x,y,z)$　はない

（4）$xy=14$ のとき，$z=\dfrac{10(x+y+6)}{4}=\dfrac{5(x+y+6)}{2}$
　　これを満たす $(x,y,z)$　はない

（5）$xy=15$ のとき，$z=\dfrac{10(x+y+6)}{5}=2(x+y+6)$
　　これを満たす$(x,y,z)=(1,15,44),(3,5,28)$

（6）$xy=16$ のとき，$z=\dfrac{10(x+y+6)}{6}=\dfrac{5(x+y+6)}{3}$
　　これを満たす $(x,y,z)$　はない

（7）$xy=17$ のとき，$z=\dfrac{10(x+y+6)}{7}$

これを満たす（$x,y,z$）はない

（8）$xy=18$ のとき，$z=\dfrac{10(x+y+6)}{8}=\dfrac{5(x+y+6)}{4}$

これを満たす（$x,y,z$）はない

（9）$xy=19$ のとき，$z=\dfrac{10(x+y+6)}{9}$

これを満たす（$x,y,z$）はない

（10）$xy=20$ のとき，$z=\dfrac{10(x+y+6)}{10}=x+y+6$

これを満たす $(x,y,z)=(1,20,27),(2,10,18),(4,5,15)$

（11）$xy=21$ のとき，$z=\dfrac{10(x+y+6)}{11}$

これを満たす（$x,y,z$）はない

（12）$xy=22$ のとき，$z=\dfrac{10(x+y+6)}{12}=\dfrac{5(x+y+6)}{6}$

これを満たす（$x,y,z$）はない

（13）$xy=23$ のとき，$z=\dfrac{10(x+y+6)}{13}$

これを満たす（$x,y,z$）はない

（14）$xy=24$ のとき，$z=\dfrac{10(x+y+6)}{14}=\dfrac{5(x+y+6)}{7}$

これを満たす（$x,y,z$）はない

（15）$xy=25$ のとき，$z=\dfrac{10(x+y+6)}{15}=\dfrac{2(x+y+6)}{3}$

これを満たす（$x,y,z$）はない

（16）$xy=26$ のとき，$z=\dfrac{10(x+y+6)}{16}=\dfrac{5(x+y+6)}{8}$

これを満たす（$x,y,z$）はない

（17）$xy=27$ のとき，$z=\dfrac{10(x+y+6)}{17}$

これを満たす（$x,y,z$）はない

（18）$xy=28$ のとき，$z=\dfrac{10(x+y+6)}{18}=\dfrac{5(x+y+6)}{9}$

これを満たす（$x,y,z$）はない

（19）$xy=29$ のとき, $z=\frac{10(x+y+6)}{19}$

これを満たす（$x,y,z$） はない

（20）$xy=30$ のとき, $z=\frac{10(x+y+6)}{20}=\frac{x+y+6}{2}$

これを満たす$(x,y,z)$ はない

②より $1\leqq z\leqq\frac{60}{xy-30}$

つまり, $31\leqq xy\leqq 90$

$xy$ の取り得る値の範囲が広いので絞り込む。

$xy\geqq 31$ だから,$xy=t$ とおくと$t\geqq 31$

$z\leqq\frac{60}{t-30}$

一方,$xy=t$ , $1\leqq x\leqq y$ だから, $y$ の値の取り得る範囲は $\sqrt{t}\leqq y\leqq t$ である。

したがって,$\sqrt{t}\leqq\frac{60}{t-30}$

$(\sqrt{t})^3-30\sqrt{t}-60\leqq 0$

$p=\sqrt{t}$ とおくと, $p\geqq\sqrt{31}$

$p^3-30p-60\leqq 0$

$f(p)=p^3-30p-60$

$f'(p)=3p^2-30=3(p+\sqrt{10})(p-\sqrt{10})$

$f(-\sqrt{10})=20(\sqrt{10}-3)>0$

$f(\sqrt{10})=-20(\sqrt{10}+3)<0$

$p\geqq\sqrt{31}$ だから$f(p)$ は単調増加。

$f(\sqrt{31}) = \sqrt{31}-60<0$

$f(\sqrt{40})=40\sqrt{40}-30\sqrt{40}-60=10(\sqrt{40}-6)>0$

$f(39)=39\sqrt{39}-30\sqrt{39}-60=9\sqrt{39}-60=3(3\sqrt{39}-20)<0$

よって

$\sqrt{31}\leqq p\leqq\sqrt{39}$

つまり,$31 \leqq t \leqq 39$

$31 \leqq xy \leqq 39$ で調べればよい。

（21）$xy=31$ のとき, $z=\dfrac{10(x+y+6)}{21}$

これを満たす $(x,y,z)$ はない

（22）$xy=32$ のとき, $z=\dfrac{10(x+y+6)}{22}=\dfrac{5(x+y+6)}{11}$

これを満たす $(x,y,z)$ はない

（23）$xy=33$ のとき, $z=\dfrac{10(x+y+6)}{23}$

これを満たす $(x,y,z)$ はない

（24）$xy=34$ のとき, $z=\dfrac{10(x+y+6)}{24}=\dfrac{5(x+y+6)}{12}$

これを満たす $(x,y,z)$ はない

（25）$xy=35$ のとき, $z=\dfrac{10(x+y+6)}{25}=\dfrac{2(x+y+6)}{5}$

これを満たす $(x,y,z)$ はない

（26）$xy=36$ のとき, $z=\dfrac{10(x+y+6)}{26}=\dfrac{5(x+y+6)}{13}$

これを満たす $(x,y,z)$ はない

（27）$xy=37$ のとき, $z=\dfrac{10(x+y+6)}{27}$

これを満たす $(x,y,z)$ はない

（28）$xy=38$ のとき, $z=\dfrac{10(x+y+6)}{28}=\dfrac{5(x+y+6)}{14}$

これを満たす $(x,y,z)$ はない

（29）$xy=39$ のとき, $z=\dfrac{10(x+y+6)}{29}$

これを満たす $(x,y,z)$ はない

以上より

$(x,y,z)=(1,11,180)$
$(x,y,z)=(1,12,95)$
$(x,y,z)=(2,6,70)$
$(x,y,z)=(3,4,65)$
$(x,y,z)=(1,15,44)$
$(x,y,z)=(3,5,28)$
$(x,y,z)=(1,20,27)$
$(x,y,z)=(2,10,18)$
$(x,y,z)=(4,5,15)$

以下のように(3,1)は9通りに分解される。

(3, 1)＝(4, 1)＋(14, 1)＋(183,1)
(3, 1)＝(4, 1)＋(15, 1)＋(98, 1)
(3, 1)＝(5, 1)＋(9, 1)＋(73, 1)
(3, 1)＝(6, 1)＋(7, 1)＋(68,1)
(3, 1)＝(4, 1)＋(18, 1)＋(47,1)
(3, 1)＝(6, 1)＋(8, 1)＋(31, 1)
(3, 1)＝(4, 1)＋(23, 1)＋(30, 1)
(3, 1)＝(5, 1)＋(13, 1)＋(21, 1)
(3, 1)＝(7, 1)＋(8, 1)＋(18, 1)

よって

(1, 1)＝(2, 1)＋(4, 1)＋(14, 1)＋(183,1)　(算出5)と同じ
(1, 1)＝(2, 1)＋(4, 1)＋(15, 1)＋(98, 1)　(算出 6)と同じ
(1, 1)＝(2, 1)＋(5, 1)＋(9, 1)＋(73, 1)　(算出9)と同じ
(1, 1)＝(2, 1)＋(6, 1)＋(7, 1)＋(68,1)　(算出11)と同じ
(1, 1)＝(2, 1)＋(4, 1)＋(18, 1)＋(47,1)　(算出7)と同じ
(1, 1)＝(2, 1)＋(6, 1)＋(8, 1)＋(31, 1)　(算出12)と同じ
(1, 1)＝(2, 1)＋(4, 1)＋(23, 1)＋(30, 1)　(算出8)と同じ
(1, 1)＝(2, 1)＋(5, 1)＋(13, 1)＋(21, 1)　(算出10)と同じ
(1, 1)＝(2, 1)＋(7, 1)＋(8, 1)＋(18, 1)　(算出13)と同じ

算出11　(1, 1)＝(2, 1)＋(6, 1)＋(7, 1)＋(68, 1)は表現される。

**(※)　3つに分解する連鎖探索法は,$(x,y,z)$ の解を見つけるのに非常に計算が煩雑になる。**