2月2問目

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，以下の問いに答えよ。

(1) 方程式 $\sin 3x = -\sin x$ を満たす x の値をすべて求めよ。

(2) 方程式 $\sin 3x = \sin x$ を満たす x の値をすべて求めよ。

(3) 不等式 $\sin 3x \geqq a \sin x$ が $-1 \leqq a \leqq 1$ を満たすすべての a に対して成り立つような x の値の範囲を求めよ。

/'21 岡山大（理系）前期 1

解答

(1) 一般的に $-\sin x = \sin(-x)$ が成り立つから，与式は

$$\sin 3x = \sin(-x)$$

とでき，これを満たす x は，整数 k を用いて

$$3x + (-x) = \pi + 2\pi k \quad \text{または} \quad 3x - (-x) = 0 + 2\pi k$$
$$\therefore \ x = \frac{(2k+1)\pi}{2} \quad \text{または} \quad x = \frac{k\pi}{2}$$

と表せる。さらに，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ に注意して

$$x = \mathbf{0},\ \boldsymbol{\frac{\pi}{2}},\ \boldsymbol{\pi},\ \boldsymbol{\frac{3\pi}{2}},\ \boldsymbol{2\pi}$$

(2) 方程式 $\sin 3x = \sin x$ を満たす x は，整数 k を用いて

$$3x + x = \pi + 2\pi k \quad \text{または} \quad 3x - x = 0 + 2\pi k$$
$$\therefore \ x = \frac{(2k+1)\pi}{4} \quad \text{または} \quad x = k\pi$$

と表せる。さらに，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ に注意して

$$x = \mathbf{0},\ \boldsymbol{\frac{\pi}{4}},\ \boldsymbol{\frac{3\pi}{4}},\ \boldsymbol{\pi},\ \boldsymbol{\frac{5\pi}{4}},\ \boldsymbol{\frac{7\pi}{4}},\ \boldsymbol{2\pi}$$

(3) x を固定して，$f(a) = \sin 3x - a \sin x$ とすると

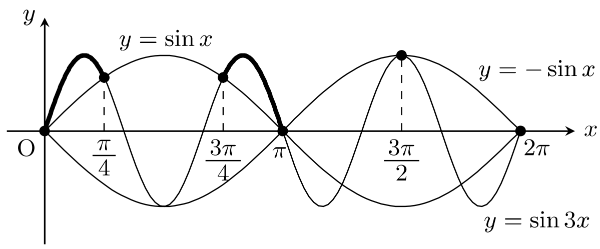
$$\sin 3x \geqq a \sin x \iff f(a) \geqq 0$$

であり，また，$f(a)$ は a についての定数関数か 1 次関数と見ることができる。よって，不等式 $f(a) \geqq 0$ が $-1 \leqq a \leqq 1$ を満たすすべての a に対して成り立つ為の条件は

$$f(-1) \geqq 0 \ \text{かつ} \ f(1) \geqq 0$$
$$\therefore \ \sin 3x \geqq -\sin x \ \text{かつ} \ \sin 3x \geqq \sin x \quad \cdots (*)$$

である。

(1)(2) の結果も踏まえて，$y = \sin 3x$，$y = -\sin x$，$y = \sin x$ のグラフは次図のようになる。



したがって，$(*)$ を満たすのは，上図の太線部分または黒丸点であるから，求める x の値の範囲は

$$\mathbf{0} \leqq \boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{\frac{\pi}{4}},\ \boldsymbol{\frac{3\pi}{4}} \leqq \boldsymbol{x} \leqq \boldsymbol{\pi},\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\frac{3\pi}{2}},\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{2\pi}$$