1 月 2 問目

i を虚数単位とし，$z=(\sqrt{6}+\sqrt{2})+(\sqrt{6}-\sqrt{2})i$ とする。次の問に答えよ。

(1) z^2 の実部と虚部を求めよ。

(2) z の偏角を θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とするとき，θ を求めよ。

(3) k を自然数とする。z^k が実数となるような最小の k の値を求めよ。

/'24 名城大（理工・情報工）A・F・K 方式 2

解 答

(1) $z=(\sqrt{6}+\sqrt{2})+(\sqrt{6}-\sqrt{2})i$ のとき

$$\begin{aligned} z^2 &= (\sqrt{6}+\sqrt{2})^2+2(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})i \\ &\qquad +(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2 i^2 \\ &= (8+4\sqrt{3})+8i+(8-4\sqrt{3})\cdot(-1) \\ &= 8\sqrt{3}+8i \end{aligned}$$

よって，z^2 の実部 $\mathrm{Re}(z^2)$ と虚部 $\mathrm{Im}(z^2)$ は

$$\mathrm{Re}(z^2)=\boldsymbol{8\sqrt{3}},\ \ \mathrm{Im}(z^2)=\boldsymbol{8}$$

(2) (1) の結果を極形式で表すと

$$z^2=16\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right) \quad \cdots\cdots ①$$

となる。よって，$|z^2|=16$ から $|z|=4$ なので，z の偏角を θ とするとき

$$z=4(\cos\theta+i\sin\theta)$$

とおけて，ド・モアブルの定理より

$$z^2=16(\cos 2\theta+i\sin 2\theta) \quad \cdots\cdots ②$$

とできる。

したがって，① と ② が一致する条件は

$$2\theta=\frac{\pi}{6}+2\pi n \qquad \therefore\ \ \theta=\frac{\pi}{12}+\pi n\ \ (n\text{: 整数})$$

と表せることである。

$0 \leqq \theta < 2\pi$ と，z の実部と虚部がともに正であることから，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ で考えるので

$$\boldsymbol{\theta=\frac{\pi}{12}}$$

《注》出題側の想定解答は上の通りだと思われるが

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\ \ \sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

であることに気付けた場合は，(1) を利用せずに

$$z=4\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

と変形でき，ただちに $\theta=\dfrac{\pi}{12}$ が得られる。

(3) (2) から

$$z=4\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

と表せるので，ド・モアブルの定理より

$$z^k=4^k\left(\cos\frac{\pi k}{12}+i\sin\frac{\pi k}{12}\right)$$

とできる。

この値が実数となる条件は

$$\sin\frac{\pi k}{12}=0$$

であり，これは

$$\frac{\pi k}{12}=\pi l \qquad \therefore\ \ k=12l\ \ (l\text{: 整数})$$

と表せることと同値である。

これを満たす自然数 k の中で最小のものは，$l=1$ のときの

$$\boldsymbol{k=12}$$