12 月 1 問目

a，b を正の定数とする。xy 平面内の 2 曲線

$$C_1 : y = x^3 - 2(a+b-1)x^2 + b(2a+b-3)x$$
$$C_2 : y = 2x^2 - 3bx$$

について，次の問いに答えよ。

(1) C_1 と C_2 の共有点をすべて求めよ。
(2) C_1 と C_2 が囲む 2 つの部分の面積が等しいとき，b を a で表せ。
(3) (2) のとき，C_1 と C_2 が囲む部分の面積を a で表せ。

/'24 関西大（総合情報）2 月 3 日 1

解 答

(1) 正の定数 a，b に対して

$$f(x) = x^3 - 2(a+b-1)x^2 + b(2a+b-3)x$$
$$g(x) = 2x^2 - 3bx$$

とすると

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= x\{x^2 - (2a+2b)x + b(2a+b)\} \\ &= x(x-b)\{x-(2a+b)\} \end{aligned}$$

とできるので，方程式 $f(x) - g(x) = 0$ の解は

$$x = 0,\ b,\ 2a+b$$

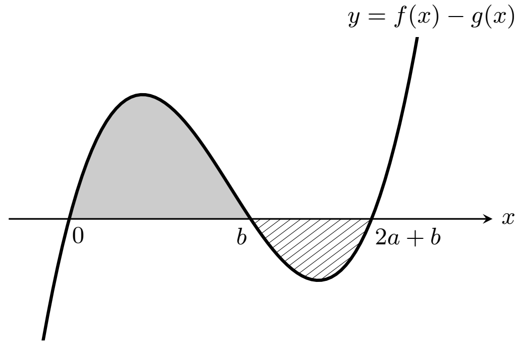
である。そして

$$g(0) = 0,\ g(b) = -b^2,\ g(2a+b) = 8a^2 + 2ab - b^2$$

であるので，C_1 と C_2 の共有点の座標は

$$\boldsymbol{(0,\ 0),\ (b,\ -b^2),\ (2a+b,\ 8a^2+2ab-b^2)}$$

(2) $0 < b < 2a+b$ であることに注意して，C_1 と C_2 が囲む 2 つの部分の面積は，次図の灰色部分と斜線部分の面積にそれぞれ等しい。



よって，この 2 つの部分の面積が等しいとき

$$\int_0^b \{f(x) - g(x)\}\,dx = \int_b^{2a+b} \{g(x) - f(x)\}\,dx$$

であり，この両辺に $\displaystyle\int_b^{2a+b} \{f(x) - g(x)\}\,dx$ を加えると

$$\int_0^{2a+b} \{f(x) - g(x)\}\,dx = 0 \quad \cdots\cdots (*)$$

が成り立つ。ここで

$$\begin{aligned} &\int_0^{2a+b} \{f(x) - g(x)\}\,dx \\ &= \int_0^{2a+b} \{x^3 - 2(a+b)x^2 + b(2a+b)x\}\,dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}(a+b)x^3 + \frac{1}{2}b(2a+b)x^2\right]_0^{2a+b} \\ &= \frac{1}{12}(2a+b)^3\{3(2a+b) - 8(a+b) + 6b\} \\ &= \frac{1}{12}(2a+b)^3(b-2a) \end{aligned}$$

となり，$2a+b > 0$ なので，$(*)$ が成り立つ為の条件は

$$b - 2a = 0 \qquad \therefore\ \boldsymbol{b = 2a}$$

〈注〉 3 次関数のグラフの点対称性を考えれば，題意を満たすとき，x 軸との共有点の x 座標が等間隔に並ぶので

$$2b = 2a + b \qquad \therefore\ b = 2a$$

(3) $b = 2a$ のとき，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \int_0^{2a} \{f(x) - g(x)\}\,dx \\ &= \int_0^{2a} (x^3 - 6ax^2 + 8a^2x)\,dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - 2ax^3 + 4a^2x^2\right]_0^{2a} \\ &= 4a^4 \end{aligned}$$

$$\therefore\ S = \boldsymbol{8a^4}$$