11月2問目

a，b，c を実数，m を整数とする。3 次関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ が次の 2 つの条件を満たすとき，a，b，c，m の値を求めよ。

- すべての実数 p に対して $\displaystyle\int_p^{p+1} f(x)\,dx=(p-m)^3$ が成り立つ。
- $f(x)$ は $-2<x<-1$ に極値をもつ。

/'24 一橋大（経済・ソーシャルデータサイエンス）後期 2

解答

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ なので

$$
\begin{aligned}
&\int_p^{p+1} f(x)\,dx\\
&=\int_p^{p+1}(x^3+ax^2+bx+c)\,dx\\
&=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2+cx\right]_p^{p+1}\\
&=\frac{1}{4}\{(p+1)^4-p^4\}+\frac{1}{3}a\{(p+1)^3-p^3\}\\
&\qquad+\frac{1}{2}b\{(p+1)^2-p^2\}+c\{(p+1)-p\}\\
&=p^3+\left(\frac{3}{2}+a\right)p^2+(1+a+b)p\\
&\qquad+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b+c\right)
\end{aligned}
$$

となる。一方

$$(p-m)^3=p^3-3mp^2+3m^2p-m^3$$

であるから，すべての実数 p に対して $\displaystyle\int_p^{p+1} f(x)\,dx=(p-m)^3$ が成り立つ条件は

$$
\begin{cases}
\dfrac{3}{2}+a=-3m\\
1+a+b=3m^2\\
\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}a+\dfrac{1}{2}b+c=-m^3
\end{cases}
$$

である。よって

$$
\begin{aligned}
a&=-3m-\frac{3}{2}\\
b&=3m^2-a-1\\
&=3m^2+3m+\frac{1}{2}\\
c&=-m^3-\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}b-\frac{1}{4}\\
&=-m^3-\frac{3}{2}m^2-\frac{1}{2}m
\end{aligned}
$$

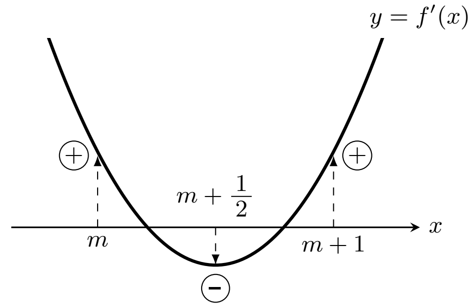
このとき

$$
\begin{aligned}
f'(x)&=3x^2+2ax+b\\
&=3x^2+(-6m-3)x+\left(3m^2+3m+\frac{1}{2}\right)\\
&=3(x-m)\{x-(m+1)\}+\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

とできるので

$$f'(m)=f'(m+1)=\frac{1}{2},\quad f'\left(m+\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$$

が成り立つ。



よって，$f(x)$ は極大値と極小値を $m<x<m+1$ にもつ。
以上から，$f(x)$ が $-2<x<-1$ に極値をもつような m の値は $m=\mathbf{-2}$ であり，このとき

$$
\begin{aligned}
a&=-3\cdot(-2)-\frac{3}{2}=\mathbf{\frac{9}{2}}\\
b&=3\cdot(-2)^2+3\cdot(-2)+\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{13}{2}}\\
c&=-(-2)^3-\frac{3}{2}\cdot(-2)^2-\frac{1}{2}\cdot(-2)=\mathbf{3}
\end{aligned}
$$