

11月1問目

次の不等式を解け。

$$|x^2 - 2x - 3| + x < 3$$

/'24 中央大(経済) 1(1)

解答

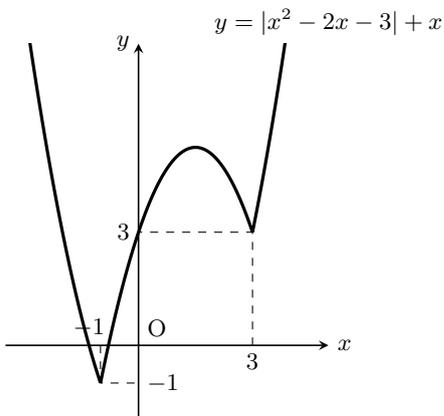
$f(x) = |x^2 - 2x - 3| + x$ とすると

$$\begin{aligned} f(x) &= |(x+1)(x-3)| + x \\ &= \begin{cases} (x+1)(x-3) + x & ((x+1)(x-3) \geq 0) \\ -(x+1)(x-3) + x & ((x+1)(x-3) \leq 0) \end{cases} \\ &= \begin{cases} x^2 - x - 3 & (x \leq -1, 3 \leq x) \\ -x^2 + 3x + 3 & (-1 \leq x \leq 3) \end{cases} \end{aligned}$$

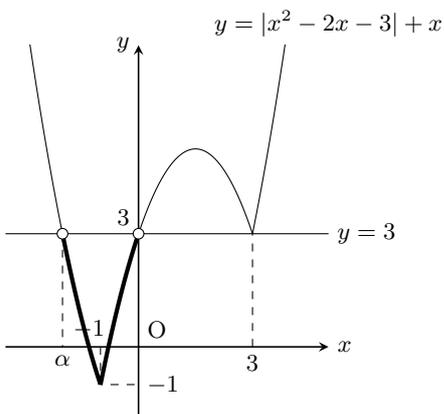
ここで、 $f(x) = |(x+1)(x-3)| + x$ から

$$f(-1) = -1, \quad f(3) = 3$$

であることと、 $y = -x^2 + 3x + 3$ の軸が $x = \frac{3}{2}$ であることに注意して、 $y = f(x)$ のグラフは次図の太線部分のようになる。



したがって、不等式 $f(x) < 3$ を満たす部分は次図の太線部分である。



図の α を求めるために、 $x < -1$ において $f(x) = 3$ とすると

$$\begin{aligned} x^2 - x - 3 &= 3 \\ \iff x^2 - x - 6 &= 0 \\ \iff (x+2)(x-3) &= 0 \quad \therefore \alpha = -2 \end{aligned}$$

以上から、求める x の値の範囲は

$$-2 < x < 0$$